

КРИТЕРИЙ БЕНДИКСОНА-ДЮЛАКА И РЕДУКЦИЯ К ГЛОБАЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ

Л.А. Черкас, А.А. Гринь

1. Введение

Рассмотрим векторное поле $f = (P, Q)$, определяемое структурно устойчивой вещественной автономной системой дифференциальных уравнений на плоскости

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2, \quad (1)$$

с непрерывно дифференцируемыми правыми частями P и Q по совокупности переменных x, y в области Ω , в которой антиседло $O(0, 0)$ является её единственной особой точкой.

Как известно [1-3], при решении задачи локализации и оценки числа предельных циклов, которая является наиболее сложной проблемой при полном качественном исследовании систем (1), во многих случаях эффективно работает критерий Бендиксона-Дюлака [4-6]. Однако для его применения к системе (1) класса C^1 в области $G \subset \Omega$ сначала нужно найти вспомогательную функцию $B(x, y) \in C^1(G)$ такую, что в G выражение

$$F(x, y) = \operatorname{div}(Bf) = \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}$$

не меняет знак, и кривая $F(x, y) = 0$ не содержит предельных циклов. Тогда система (1) в двусвязной области G может иметь не более одного предельного цикла, а в односвязной области G предельных циклов быть не может. Критерий Бендиксона является частным случаем критерия Дюлака при $B \equiv 1$.

В таком классическом смысле функция $B(x, y)$, названная функцией Дюлака, при доказательстве отсутствия предельных циклов полиномиальных систем (1) в односвязной области и единственности предельного цикла в двусвязной области использовалась многими авторами [1, 4, 5]. Однако поскольку сам критерий не дает метода ни для построения функции B ни для локализации предельных циклов, содержащихся в области G , то успех как в определении G в области Ω так и в выборе функции $B(x, y)$, удовлетворявшей бы всем требованиям критерия Дюлака и соответствующей данной системе, зависит в каждом конкретном случае от вида самой системы и опыта исследователя. В случае существования нескольких предельных циклов, расположенных достаточно близко друг к другу, эта задача усложняется.

Цель данной работы заключается в разработке регулярных методов локализации и оценки числа предельных циклов системы (1), окружающих единственную особую точку O , с помощью построения в Ω кольцеобразных подобластей с трансверсальными границами и решении задачи оптимизации для построения подходящих функций Дюлака, позволяющих применить к каждой из подобластей критерий Бендиксона-Дюлака. Кроме того сформулирован принцип редукции к глобальной единственности, позволяющий дать точную глобальную оценку числа предельных циклов рассматриваемой системы (1).

2. Предварительные факты и теоремы

Из условия, которое критерий Бендиксона-Дюлака накладывает на функцию $F(x, y)$, вытекает трансверсальность векторному полю системы (1) кривой $B(x, y) = 0$. Следовательно, предельные циклы ее не пересекают, и их исследование можно проводить в каждой из областей $B > 0$ или $B < 0$ по отдельности. Поэтому в ряде случаев [5] использовалась положительная функция Дюлака, так как тогда не нужно рассматривать кривую $B = 0$. Например, если $B = e^{U(x,y)}$, то

$$F(x, y) = e^U \left(\frac{\partial U}{\partial x} P + \frac{\partial U}{\partial y} Q + \operatorname{div} f \right),$$

и применение критерия сводится к нахождению положительного выражения в скобках.

В работах [8-14] нами был предложен и развит новый подход использования функции Дюлака в виде $B = |\Psi(x, y)|^{\frac{1}{k}}$, $k \neq 0$, $\Psi(x, y) \in C^1(\Omega)$, для которой выполняется неравенство

$$\Phi \equiv D(\Psi) \equiv k\Psi \operatorname{div} f + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 (< 0), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad f = (P, Q), \quad (2)$$

$D = k \operatorname{div} f + P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ – оператор Дюлака. Поскольку $\operatorname{div}(Bf) = \Phi |\Psi|^{\frac{1}{k}-1} \frac{1}{k} \operatorname{sign} \Psi$, то из условия (2) вытекает трансверсальность векторному полю f кривой $\Psi(x, y) = 0$, которая разбивает область Ω на подобласти, в каждой из которых функция $B = |\Psi|^{\frac{1}{k}}$ является классической функцией Дюлака. Тогда число предельных циклов системы (1) в области Ω не превышает максимального числа негомоторных друг другу двусвязных областей, образованных кривыми $\Psi = 0$ и $\partial\Omega$. Существующие предельные циклы являются грубыми, а тип устойчивости каждого из них определяется знаком $k\Psi$ в подобласти его локализации.

Функцию $\Psi(x, y)$ удобно искать в виде линейной комбинации заданных базисных функций, т.е.

$$\Psi = \Psi(x, y, C) = \sum_{j=1}^m C_j \Psi_j(x, y), \quad C_j = \operatorname{const}, \quad C = (C_1, \dots, C_m). \quad (3)$$

Тогда функция Φ также является аналогичной линейной комбинацией известных функций:

$$\Phi = \Phi(x, y, C) = \sum_{j=1}^m C_j \Phi_j(x, y), \quad \Phi_j = D(\Psi_j),$$

и существование линейной комбинации (3), удовлетворяющей неравенству (2) при заданном значении k , в случае замкнутой ограниченной области Ω эквивалентно неравенству

$$L = \max_{|C_j| \leq 1} \min_{(x,y) \in \Omega} \Phi(x, y, C) > 0. \quad (4)$$

Линейная зависимость функции Φ от дополнительных переменных C_j , $j = 1, \dots, m$, позволяет находить максимин (4) с помощью решения соответствующей задачи линейного программирования

$$L \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n C_j \Phi_j(x_p, y_p) - L \geq 0, \quad |C_j| \leq 1, \quad (5)$$

на сетке узлов $(x_p, y_p), p = 1, \dots, N_0$, взятой в области Ω , применяя различные аспекты указанного подхода [9–13]. Если на достаточно мелкой равномерной сетке узлов найдено решение (C^*, L^*) задачи (5), то L^* будет хорошим приближением значения максимина (4). При этом выбор сетки узлов, чисел k и m , а также функций Ψ_j производится экспериментальным образом. Затем полученные результаты можно строго проверить с использованием методов алгебры и анализа.

Из результатов работ [8, 9] вытекает следующая

Теорема 1. Пусть структурно устойчивая система (1) в односвязной области Ω имеет единственную особую точку – антиседло O , $\operatorname{div} f(O) \neq 0$, и функцию Ψ , удовлетворяющую условию (2). Тогда, если уравнение $\Psi(x, y) = 0$ определяет q вложенных друг в друга овалов, то в каждой из $q - 1$ двусвязных подобластей Ω_i , ограниченных соседними овалами, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом она может иметь в области Ω не более q предельных циклов.

Теорема 1 может быть успешно использована для применения критерия Бендиксона-Дюлака, который для удобства сформулируем в следующем виде.

Теорема 2. Для существования единственного (отсутствия) предельного цикла системы (1) в двусвязной подобласти $\Omega_i \subset \Omega$ с трансверсальными границами типа вход-вход или выход-выход (вход-выход) необходимо и достаточно существования функции $B(x, y) > 0$, такой, что в Ω_i выполняется условие $F(x, y) \neq 0$.

3. Построение областей локализации предельных циклов

В случае больших размеров области Ω и плохой разделенности предельных циклов условие (2) становится труднодостижимым. Тогда от положительности Φ во всей области Ω можно отказаться, заменив его более удобным в конкретном случае условием. Например в работе [13] показана эффективность применения свойства трансверсальности векторному полю системы (1) кривых $\Psi = 0$ и $\Phi = 0$, которое имеет место, если кривые $\Phi = 0$ и $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ не пересекаются. Поэтому в первом методе построения областей локализации предельных циклов для применения критерия Бендиксона-Дюлака мы используем более облегченный вариант такого подхода, основанного на следующей теореме.

Теорема 3. Пусть для определенной в односвязной области $\Omega \subset R^2$ системы (1) существуют функция $\Psi(x, y) \in C^1(\Omega)$ и число $k \in R, k \neq 0$, такие, что в области Ω кривые $\Psi = 0$ и $\Phi = 0$ не пересекаются, тогда предельные циклы системы (1) не пересекают кривую $\Psi = 0$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 в работе [13].

Таким образом, сначала в односвязной области Ω локализации предельных циклов системы (1) мы пробуем построить функцию (3), удовлетворяющую условию (2). Если это не удастся сделать, то варьируя сетку узлов оптимизации, числа k и m , а также функции Ψ_j , пробуем найти решение задачи (5), при котором выполняется условие теоремы 3. Если такое решение найдено, то мы получаем разбиение Ω кривыми $\Psi = 0$ на кольцеобразные подобласти Ω_i . В каждой такой подобласти Ω_i , где выполняется одно из условий $\Psi > 0$ или $\Psi < 0$, и функция Φ меняет знак, снова строим функцию Ψ вида (3) для системы (1) за счет решения соответствующей задачи линейного программирования (5) уже на новой сетке, что, как показывает опыт, сделать гораздо проще, чем решить предыдущую задачу. Далее на основании теоремы Бендиксона-Дюлака получаем строгое доказательство единственности предельного цикла или его отсутствия в Ω_i . В итоге на основании результатов оценки в каждой такой подобласти Ω_i делаем вывод о точном числе и локализации всех предельных циклов системы (1) в области Ω .

Второй метод построения областей локализации предельных циклов системы (1) основан на погружении ее в однопараметрическое семейство систем

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) - \alpha Q(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + \alpha P(x, y), \quad \alpha \in I \subset \mathbb{R}. \quad (6)$$

Заметим, что и для семейства (6) антиседло $O(0, 0)$ также является единственной особой точкой [15]. Кроме того, векторное поле f_1 , определяемое семейством (6), трансверсально поворачивается по отношению к полю f системы (1). Следовательно, при различных значениях параметра α предельные циклы семейства (6) не пересекаются [7], и для него можно ввести функцию предельных циклов (функцию Андронова-Хопфа) $\alpha = l(x) = M(x, 0)$, различные аспекты построения и исследования которой в ограниченной области Ω представлены в работах [9, 11, 16]. Здесь уравнение $\alpha = M(x, y)$ определяет в пространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ поверхность предельных циклов, а значение параметра $\alpha^* = l(0)$ соответствует бифуркации Андронова-Хопфа.

При этом предполагается, что область значений функции $\alpha = l(x)$, определенной в ограниченной области Ω , которую образуют предельные циклы системы (6) при изменении α является конечным промежутком $I_0 \subset I$. Тогда существует разбиение Ω на конечное число кольцеобразных подобластей Ω_i , $i = \overline{1, n}$, типа вход-вход, выход-выход и вход-выход, а также односвязную подобласть Ω_0 , содержащую точку O , границы которых $\partial\Omega_i$ являются трансверсальными векторного поля системы (1). Такое разбиение для системы (1) удобно проводить с помощью предельных циклов системы (6), численно найденных с определенной точностью при соответствующих значениях параметра $\alpha_i - \epsilon$ и $\alpha_i + \epsilon$, где ϵ - достаточно малое положительное число.

Причем успех практической реализации предложенного подхода зависит не только от метода построения кольцеобразных подобластей Ω_i с трансверсальными границами, но и от выбора на них сетки оптимизации для решения задачи (5). Наилучший результат достигается на равномерной сетке.

В некоторых случаях удобно перейти к полярной системе координат r, φ с полюсом в точке O и вместо системы (1) рассматривать систему

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= G(r, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = R(r, \varphi), \quad G(r, \varphi) = \frac{xP + yQ}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ R(r, \varphi) &= \frac{xQ - Py}{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

в полосе $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Предельные циклы системы (1), окружающие начало координат, соответствуют предельным циклам второго рода системы (7), не окружающие - предельным циклам первого рода. При переносе полюса в другую точку фазовой плоскости системы (1) род цикла может измениться. Для применения критерия Бендиксона-Дюлака к исследованию предельных циклов второго рода системы (7) нужно сначала построить подобласти их локализации, ограниченные трансверсальными 2π -периодическими функциями $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$.

4. Метод редукции к глобальной единственности предельного цикла

Полученную таким образом в ограниченной области Ω точную оценку числа предельных циклов системы (1) в некоторых случаях с помощью функции $\alpha = l(x)$ можно распространить на неограниченную область Ω . Тогда дополнительно нужно

найти такое значение $\alpha \neq 0$, при котором система (6) имеет единственный предельный цикл, окружающий все предельные циклы системы (1) при $\alpha \in I_0$. Затем вместо области Ω берется область, ограниченная этим циклом и все сводится к предыдущему случаю.

Такая редукция к глобальной единственности может быть применена не только к индивидуальной системе (1), но и к параметрическому семейству таких систем

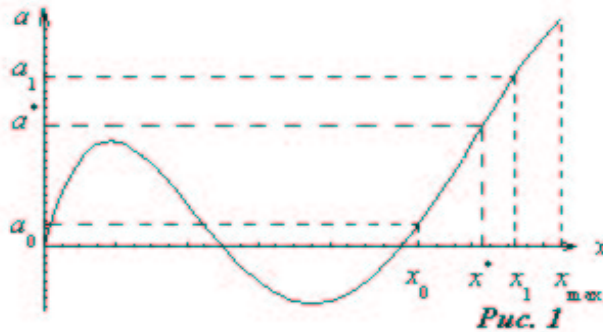
$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, a), \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2, a \in I \subset R, \quad (8)$$

для которого существует функция Андронова-Хопфа $a = l(x)$, ассоциированная с поворачивающим поле параметром a . Если с помощью исследования функции $a = l(x)$ мы изучим зависимость числа предельных циклов и их локализации от параметра a при его изменении на конечном промежутке $I_0 \subset I$ в ограниченной области Ω и дополнительно найдем такое значение $a \neq 0$, при котором семейство (8) имеет единственный предельный цикл, окружающий все его предельные циклы при $a \in I_0$, то полученная зависимость будет давать как локальную так и глобальную оценку числа предельных циклов семейства (8) при $a \in I_0$.

Сначала суть метода редукции к глобальной единственности предельного цикла рассмотрим на примере системы Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x); \quad xg(x) > 0, \quad x \neq 0; \quad F(0) = 0, \quad (9)$$

с $F(x) = F_1(x) + ax$, у которой O является единственной конечной особой точкой – антиседлом, бесконечность является отталкивающей, и параметр a поворачивает ее векторное поле. Для системы (9) строим функцию предельных циклов $a = l(x)$ в виде полинома некоторой степени (рис. 1) на промежутке $J_1 = [0, x_{\max}]$ и подтверждаем ее поведение с помощью нахождения подходящих функций Ψ на отрезке $[0, x_1]$, $0 < x_1 \leq x_{\max}$, $a_1 = l(x_1)$. Если на промежутке $J_0 = [0, x_0]$, $x_0 \leq x_1$, число корней уравнения $l(x) = a^0$, $a^0 < a_1$ равно p , то число предельных циклов системы (9) в полосе $-x_0 < x < x_0$ также равно p . Теперь предположим, что уравнение $l(x) = a^*$, $a^0 < a^* \leq a_1$ имеет единственный корень x^* , т.е. система (9) имеет единственный предельный цикл, проходящий через точку с координатами $(x^*, 0)$ и этот факт подтверждается с помощью построения функции Дюлака B для системы (9) при $a = a^*$ во всей ее фазовой плоскости. Тогда функция $l(x)$ не может принимать значение a^* вне промежутка J_1 , другими словами, функция $l(x)$ не имеет точек экстремума при $x > x_{\max}$, $a \in E^*(l)$, где $E^*(l)$ – множество значений функции $l(x)$ при $-x^* \leq x \leq x^*$, $a^* = l(x^*)$. Следовательно, при любом значении $a^0 \in E^*(l)$ система (9) имеет в целом точно столько же предельных циклов как в полосе $-x^* \leq x \leq x^*$.



Для доказательства же единственности предельного цикла системы (9) при $a > a^*$ в некоторых случаях можно воспользоваться результатами Лефшеца [17]

Теорема 4. Система Лъенара вида (9) обладает единственным (устойчивым) предельным циклом, если

1. $F'(x) = F'(x)$, $F'(0) < 0$;
2. $g(x) = -g(-x)$;
3. $F(x)(x - x^*) > 0$ для $\forall x \in (0; x^*) \cup (x; +\infty)$, причем $F(x)$ монотонна для $x > x^*$ и $F(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

Из теоремы 4 следует, что $l(x)$ возрастает в интервале $x > x^*$.

Метод редукции к глобальной единственности предельного цикла для канонического семейства квадратичных систем

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy, \quad \frac{dy}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + ay^2, \quad (10)$$

имеет свои особенности. При выполнении условий

$$\sum_{i+j=0}^2 a_{ij}(-1)^j = 0, \quad a_{02} = a, \quad 2a - a_{01} - a_{10} - 2a_{20} = L > 0, \quad (a_{11} + a_{01} - 2a - 1)^2 - 4L < 0,$$

система (10) имеет фокус в точке $A(1, -1)$, а ее векторное поле поворачивает параметр a_{11} . Поскольку прямая $x = 0$ трансверсальна векторному полю системы (10), то предельные циклы ее не пересекают и можно изучать предельные циклы в каждой полуплоскости отдельно. Здесь рассмотрим лишь полуплоскость $x > 0$, содержащую точку A .

Изменяя параметр a_{11} при фиксированных остальных параметрах, строим функцию предельных циклов Андронова-Хопфа $a_{11} = l(x)$ на промежутке $J_1 = [x_0, x_{\max}]$, где конечные точки удовлетворяют условиям $x_0 < 1$, $x_{\max} > 1$, и x_{\max} соответствует бифуркации предельного цикла из петли сепаратрисы седла $S(x_0, -1/x_0)$. Если на подпромежутке $J_0 = [x_1, x_2] \subset J_1$ число корней уравнения $l(x) = a_{11}^0$ равно $2p$, то число предельных циклов системы (10) в полосе $x_1 < x < x_2$ равно p . Теперь предположим, что уравнение $l(x) = a_{11}^1$ при $a_{11}^1 < a_{11}^0$ дает единственный предельный цикл, расположенный в полосе $x_3 < x < x_4$, где $[x_3, x_4] \subset J_0 \subset J_1$. Тогда функция $l(x)$ не может принимать значение a_{11}^0 вне промежутка J_1 . Следовательно, для значения a_{11}^0 система (10) имеет точно p предельных циклов в полуплоскости $x > 0$.

Таким образом в общем случае справедлива следующая

Теорема 5. Пусть для семейства систем (8) с поворачивающим поле параметром a в односвязной неограниченной области Ω существуют единственная ее особая точка – антиседло $O(0, 0)$ и непрерывная функция предельных циклов $a = l(x, b)$, $x \in [0, X)$, где $l(0, b^*) = a^*$ соответствует бифуркации Андронова-Хопфа. Тогда, если при $a = a_0$ система (8) имеет в области Ω единственный предельный цикл, разбивающий Ω на две области Ω_1 и Ω_2 , то при любом $a \in E(l)$ все предельные циклы системы (8) находятся в одной из областей Ω_1 , Ω_2 , и в этом случае система (8) имеет в области Ω столько же предельных циклов, сколько она их имеет в области Ω_1 или Ω_2 .

Если, например, Ω_1 – ограниченная область, содержащая предельные циклы системы (8), то задача оценки их числа в неограниченной Ω сводится к такой же задаче в Ω_1 .

5. Примеры

Представленные способы построения подобластей локализации предельных циклов, а также метод редукции к глобальной единственности предельного цикла эффективно апробированы на примерах конкретных квадратичных систем и системы Льенара, которые были просчитаны с применением компьютерного пакета "Mathematica".

Пример 1. Сначала проиллюстрируем подход для построения подобластей локализации предельных циклов, основанный на применении теоремы 3. Рассмотрим квадратичную систему

$$\frac{dx}{dt} = -(x+1)y + \alpha Q(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad Q(x, y) = x + \lambda y + ax^2 + b(x+1)y + cy^2, \quad (11)$$

при $a = 0.1, b = -1.95002, c = 0.2, \alpha = 0.3, \lambda = 1.65$. Численный прогноз показы-

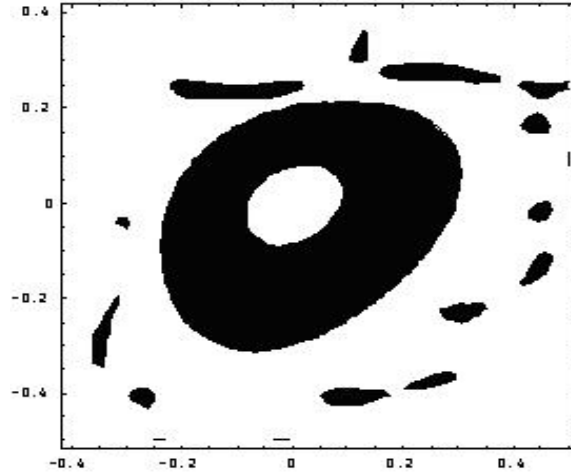


Рис. 2

вает, что система (11) имеет по крайней мере два предельных цикла в квадрате $\Omega : -0.4 \leq x \leq 0.5, -0.5 \leq y \leq 0.4$, окружающих особую точку O . Для получения точной оценки сначала ищем функцию Ψ в виде (3) с помощью решения задачи (5) на равномерной сетке узлов (x_p, y_p) в квадрате Ω . Наилучший результат достигается на решении $(C^*, L^*), L^* = 6.7566 * 10^{-5}$ при $k = -0.5, p = 1, \dots, 625$, когда Ψ является многочленом двенадцатой степени. Уравнение $\Psi(x, y, C^*) = 0$ определяет в Ω два вложенных друг в друга овала Γ_1 и Γ_2 , окружающих точку O (рис. 2). Функция $\Phi(x, y, C^*)$ положительна в Ω за исключением шестнадцати подобластей малых размеров, расположенных вне внешнего овала Γ_2 . Поэтому разбиение Ω на подобласти получаем только с использованием овалов кривой $\Psi(x, y, C^*) = 0$. Тогда из теоремы 2 следует, что в кольцеобразной подобласти Ω_1 , образованной овалами Γ_1 и Γ_2 , система (11) имеет единственный предельный цикл. Теперь в качестве подобласти Ω_2 берем часть Ω , расположенную между овалом Γ_2 и границей Ω

$$\Omega_2 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \Omega, \Psi(x, y, C^*) < 0 \cap x^2 + y^2 \geq 0.03\}.$$

Задав на ней равномерную сетку, снова решаем задачу (5). Здесь успех достигается на решении $(C^*, L^*), L^* = 0.0099$ при $k = -0.5$, когда Ψ представляет собой многочлен восьмой степени. Функции $\Phi(x, y, C^*)$ и $\Psi(x, y, C^*)$ положительны в Ω_2 , что означает существование точно одного предельного цикла в ней. На рис. 3 темным пятном изображена подобласть, где $\Phi(x, y, C^*) < 0$, а также узлы сетки оптимизации в Ω_2 и предельный цикл в ней. Таким образом заключаем, что система (11) в области Ω имеет точно два предельных цикла.

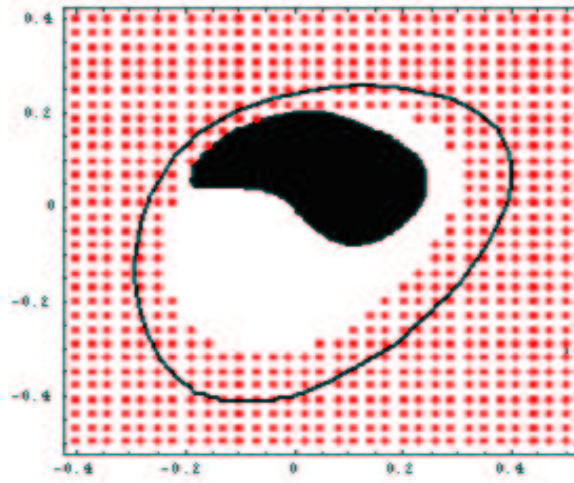


Рис. 3

Пример 2. Проиллюстрируем на системе (10) метод построения подобластей локализации предельных циклов с помощью погружения в однопараметрическое семейство (6).

Предварительно в ней сделаем преобразование $Y = yw$, которое в w раз сжимает предельные циклы в направлении оси Oy , а саму систему приводит к виду

$$\frac{dx}{dt} = w + xy, \quad \frac{dy}{dt} = w^2(a_{20}(x^2 - 1) + a_{10}(x - 1)) + w(a_{11}(xy + w) + a_{01}(y + w)) + a(y^2 - w^2), \quad (12)$$

В ней переменная Y заменена на y . Особая точка A перейдет в $\tilde{A}(1, -w)$. Затем в системе (12) сделаем замену $x = 1/\xi$, $y = Y/\xi - \xi w$ и умножим полученную систему на $-\xi$, то получим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi Y, \quad \frac{dY}{dt} = -w^2 P_4(\xi) - w P_2(\xi) Y - (a - 1) Y^2, \\ P_4(\xi) &= a_{20} + a_{10} \xi + (a_{01} - a_{20} - a_{10} - a) \xi^2 - a_{01} \xi^3 + a \xi^4, \\ P_2(\xi) &= a_{11} + a_{01} \xi - (2a + 1) \xi^2. \end{aligned} \quad (13)$$

При таком преобразовании экватор сферы Пуанкаре системы (10) перейдет в инвариантную прямую $\xi = 0$ системы (13), а особая точка $\hat{A}(1, -w)$ перейдет в особую точку $\hat{A}(1, 0)$.

Теперь погружаем систему (13) в семейство (6). При $a = \frac{18}{23}$, $a_{01} = 0.835$, $a_{11} = 1.7313$, $a_{20} = -40$, $a_{10} = -\frac{2206859}{18400}$, $w = \frac{1}{20}$ функция Андронова-Хопфа $\alpha = l(\xi)$ на промежутке $[1.1; 2.9]$ принимает вид

$$\begin{aligned} \alpha &= -0.000832 + 0.005187\xi - 0.013091\xi^2 + 0.017742\xi^3 - 0.014838\xi^4 + 0.008165\xi^5 - \\ &\quad - 0.002949\xi^6 + 0.000649\xi^7 - 0.00007\xi^8 + 5.137752 \cdot 10^{-7}\xi^9 + 3.842235 \cdot 10^{-7}\xi^{10} \end{aligned}$$

и показывает, что система (13) имеет в полуплоскости $\xi > 0$ по крайней мере три предельных цикла L_1, L_2 и L_3 , окружающих особую точку \hat{A} и пересекающих полуось $\xi > 1$ при $\xi = 1.50544, 2.10482, 2.70156$. Построить функцию Ψ на равномерной сетке узлов в прямоугольнике локализации предельных циклов $\Omega : 0 \leq \xi \leq 3, -1.5 \leq Y \leq 1.2$ с помощью решения задачи (5) не удалось. Поэтому для получения точной

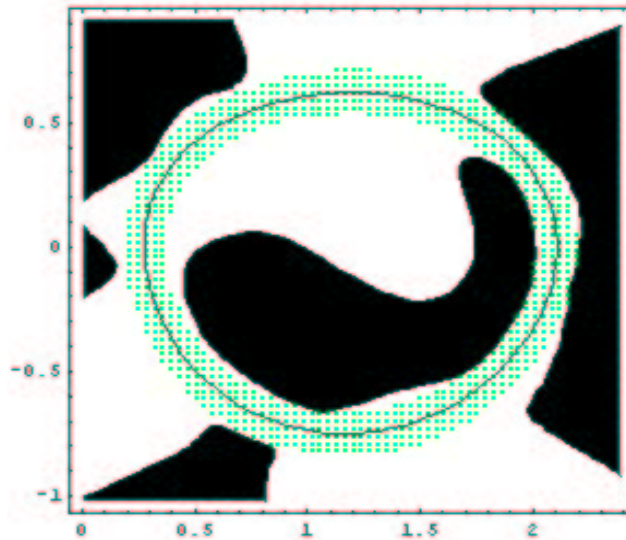


Рис. 4

оценки числа предельных циклов системы (13) разбиваем Ω с помощью предельных циклов системы (6) на кольцеобразные подобласти, две из которых (содержащие циклы L_1 и L_3) имеют тип вход-вход и одна (содержащая цикл L_2) тип выход-выход. В каждой подобласти с помощью решения в ней задачи (5) на равномерной сетке построена соответствующая функция Ψ при $k = -1$. В подобласти, содержащей внутренний предельный цикл L_1 , функция Ψ построена в виде многочлена седьмой степени. В подобластях, содержащих предельные циклы L_2 и L_3 , Ψ является многочленом степени восемь и девять соответственно. На рис. 4 изображена сетка оптимизации в кольцеобразной подобласти с циклом L_2 . Темные пятна соответствуют условию $\Phi(x, y, C^*) < 0$, функция $\Psi(x, y, C^*) > 0$ в рассматриваемой подобласти. С помощью теоремы 2 делаем вывод о единственности предельного цикла в каждой из этих подобластей. Таким образом в прямоугольнике Ω система (13) имеет точно три предельных цикла.

Кроме функций Ψ для системы (13) в рассматриваемых подобластях также успешно построены функции Дюлака в виде $B = e^{U(x,y)}$. Этот способ является более надежным, так как функция B не меняет знак. Эффективность же обоих способов находится на одном уровне, поскольку при их реализации производится примерно одинаковый объем вычислений.

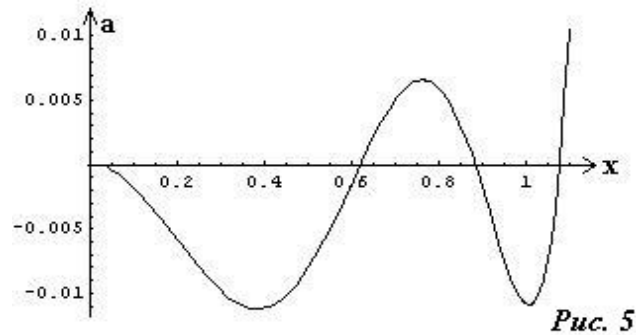
Также эффективно работает метод преобразования системы (13) к соответствующей системе (7) в полярных координатах. Преимущество данного подхода по отношению к предыдущим заключается в более простой технике построения сетки оптимизации в подобласти локализации предельного цикла.

Пример 3. Для системы (9) с $F(x) = (x^2 - 1.1)(x^2 - 0.7)(x^2 - 0.3)x^3 - ax$, на промежутке $[0.01, 1.1]$ построена функция предельных циклов вида [16]

$$l(x) = -0.185047x^2 + 0.291759x^3 - 2.324506x^4 + 18.009895x^5 - 61.599995x^6 + \\ + 124.894786x^7 - 160.406749x^8 + 125.965646x^9 - 54.839132x^{10} + 10.182582x^{11}.$$

На рассматриваемом промежутке в зависимости от значения параметра a данная система может иметь до четырех предельных циклов, так если взять $a^0 = -0.005$, то $p = 4$ (рис. 5). Заметим, что не всегда функция Дюлака, построенная в полосе, является таковой для системы на всей плоскости. В настоящем примере можно выбрать

$x_1 = x_0 = x^* = 1.09918$, что соответствует $a^* = 0.01$. При указанном значении параметра a и $k = -0.95$ для системы в полосе $-1.2 \leq x \leq 1.2$ построена функция Дюлака B с функцией Φ в виде полинома 80-й степени и функцией Ψ в виде полинома 8-й степени относительно переменной y и 72-й степени относительно x . Средствами анализа доказываем, что найденная функция определяет один овал и является также функцией Дюлака на всей фазовой плоскости системы. Единственность предельного цикла системы при $a > 0.001$ доказывается с помощью теоремы Лефшеца. Следовательно, оценка числа предельных циклов данной системы, полученная для полосы $-1.2 \leq x \leq 1.2$, является глобальной.



Полученная оценка согласуется с гипотезой С. Смейла о числе предельных циклов систем Лъенара такого вида [2, 3].

Литература.

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
2. Smale S. Mathematical problems for the next century // Mathematical Intelligencer. 1998. Vol. 20. P.7 - 15.
3. Pyashenko Y. Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bulletin of the AMS. 2002. Vol. 39. №3. P. 301 - 354.
4. Yanqian Ye. Theory of limit cycles // Transl. of AMS. Math. Monographs. Providence. 1986. Vol.66.
5. Черкас Л.А. // Дифференц. уравнения. 1977. Т.13, №5. С.779 - 801.
6. Perko L. Differential equations and dynamical systems. Texts in applied mathematics 7, Springer - Verlag. 2001.
7. Dumortier F., Llibre J., Artes J.C. Qualitative theory of planar differential systems, Universitext. Springer, 2006.
8. Черкас Л.А. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, №5. С.689 - 699.
9. Гринь А.А., Черкас Л.А. // Труды Института математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С.29 - 38.
10. Черкас Л.А. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, №10. С.1334 - 1342.
11. Гринь А.А., Черкас Л. А. // Дифференц. уравнения. 2005. Т.41, №1. С.50 - 60.
12. Черкас Л. А., Гринь А.А. // Дифференц. уравнения. 2006. Т.42, №2. С.213 - 220.
13. Гринь А.А. // Дифференц. уравнения. 2006. Т.42, №6. С.840 - 843.
14. Grin A.A., Schneider K.R. // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis. 2007. Volume 14, № 5. P. 641 - 656.

15. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 488 с.
16. *Cherkaş L.A., Grin A.A., Schneider K.R.* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2007. № 28. P. 1 – 11.
17. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. 320 с.