УДК 517.925.42

А.А. Гринь

Оценка числа предельных циклов уравнения Абеля в некоторых случаях

Разработанный ранее совместно с Л.А. Черкасом подход к решению проблемы оценки числа и локализации предельных циклов для автономных систем на плоскости в настоящей работе переносится на исследование предельных циклов второго рода автономных систем дифференциальных уравнений с цилиндрической фазовой поверхностью.

Ключевую роль здесь играет исследование функции предельных циклов второго рода, основанное на построении вспомогательных функций Дюлака–Черкаса и Пуанкаре. Представлены и доказаны все принципиальные аспекты, отличные от классического подхода. Построение указанных функций в виде линейной комбинации некоторых базисных функций, как и для автономных систем на плоскости, сводится к решению соответствующей задачи линейного программирования относительно коэффициентов рассмотренной линейной комбинации. Предложенный метод реализован в компьютерной системе "Mathematica 5.2" и эффективно апробирован на примерах однопараметрических семейств уравнений Абеля.

1. Введение. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = P(u, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u, y), \tag{1}$$

в которой $P, Q \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq R^2$, а также являются периодическими функциями *u* с периодом 2π. В силу периодичности вместо фазовой плоскости (u, y) поведение траекторий системы (1) достаточно рассмотреть на круговом цилиндре $\Omega_c = \{(u, y) : u \in [u_0, u_0 + 2\pi],\ y \in R\}$, где возможны те и только те типы траекторий, что и для системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{2}$$

с плоским фазовым пространством [1]. Однако следует различать предельные циклы, не охватывающие и охватывающие цилиндр, которые соответственно называются циклами первого и второго рода [2]. Так, для предельных циклов первого рода системы (1) применим обобщенный метод модифицированных функций Дюлака–Черкаса [3] и различные пути его реализации [4] для оценки числа и локализации предельных циклов структурно устойчивой системы (2). Кроме того, можно использовать представленные в работах [5, 6] алгоритм построения и метод исследования функции предельных циклов (Андронова–Хопфа) однопараметрических семейств систем (2). Однако при изучении предельных циклов второго рода системы (1) возникают некоторые отличительные особенности, связанные с построением функций Дюлака–Черкаса и Пуанкаре, изучение которых является целью настоящей работы. Полученные теоретические результаты эффективно апробированы на системах, соответствующих однопараметрическим семействам уравнения Абеля [7].

2. Критерий Дюлака для предельных циклов второго рода. Пусть $D = \{(u, y) : u \in [u_0, u_0 + 2\pi],\ \gamma_1 = \gamma_1(u) \le y \le \gamma_2 = \gamma_2(u)\} \subset \Omega_c$ – некоторая кольцеобразная область (кольцо), заключенная между двумя замкнутыми непересекающимися кривыми γ_1 и γ_2, охватывающих цилиндр, $X = (P, Q)$ – векторное поле, задаваемое системой (1) на нем. Функция $B \in C^1(D)$, для которой $div(BX)$ не меняет знак в области *D*, а кривая $div(BX) = 0$ не содержит предельных циклов, называется функцией Дюлака системы (1) в области *D*. Тогда по критерию Дюлака в случае существования такой функции *B* система (1) в рассматриваемой области *D* не имеет предельных циклов первого рода и может иметь не более одного предельного цикла второго рода [1].

Теперь рассмотрим новый подход, являющийся обобщением критерия Дюлака.

Определение 1. 2π–периодическая по *u* функция $\Psi(u, y) \in C^1(D)$ называется функцией Черкаса системы (1) в области *D*, если существует действительное число $k \ne 0$ такое, что в *D* выполняется неравенство

$$\Phi := k\Psi divX + \frac{\partial \Psi}{\partial u}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q > 0 \quad (< 0). \tag{3}$$

Отметим ряд ключевых свойств, вытекающих из определения 1 и результатов работы [8].

Лемма 1. *Если* Ψ *является функцией Черкаса системы (1) в области D и* $W := \{(u, y) \in D : \Psi(u, y) = 0\}$, *то*

1. $B := |\Psi|^{\frac{1}{k}}$ *представляет собой функцию Дюлака в классическом варианте в каждой из подобластей D, где* Ψ *является положительной или отрицательной.*

2. траектории системы (1) при встрече с множеством W пересекают его транверсально.

3. множество W не содержит особых точек этой системы.

4. множество W представляет собой кривую, ветви которой не пересекаются друг с другом.

5. предельные циклы системы (1), целиком расположенные в D, не пересекают кривую W.

Замечание 1. Из леммы 1 следует, что множество *W* может состоять из двух непересекающихся подмножеств, представляющих собой незамкнутые кривые W_{nc} и овалы, охватывающие цилиндр W_{cs}. При этом *W* отделяет подобласти области *D*, где $\Psi > 0$ от подобластей, где $\Psi < 0$.

Замечание 2. Принципиальное преимущество предложенного подхода к оценке числа предельных циклов перед классическим критерием Дюлака заключается в отсутствии необходимости заранее проводить локализацию предельных циклов, поскольку она следует из топологического анализа кривых множества *W*.

Следующий результат является уточнением обобщенного критерия Дюлака для области *D*, приведенного нами в работе [8].

Теорема 1. *Пусть* Ψ *является функцией Черкаса системы (1) в области D, а множество W состоит из s овалов, охватывающих цилиндр и разбивающих D на* $s+1$ *кольцо. Тогда при положительном k система (1) в D имеет не более одного предельного цикла второго рода, а при отрицательном k она имеет, по крайней мере,* $s-1$ *предельный цикл второго рода, если D не содержит особых точек. Всего же система (1) в D может иметь не более* $s+1$ *таких предельных циклов.*

Доказательство. Не теряя общности, можем считать, что $\Phi > 0$ в *D*. Тогда на каждом из *s* овалов множества *W*, разбивающих область *D* на $s+1$ кольцо, в соответствии с леммой 1 производная $\dfrac{d\Psi}{dt} > 0$. Таким образом, любая траектория системы (1) при возрастании времени может пересечь любой из указанных овалов только в направлении из кольца, где $\Psi < 0$, в кольцо, где $\Psi > 0$. С другой стороны из (3) имеем

$$div\, f = \frac{\Phi - \dfrac{d\Psi}{dt}}{k\Psi}. \tag{4}$$

Предположим, что в каком-то из колец существует предельный цикл Γ. Тогда на нем из (4) получаем

$$\int_{\Gamma} div\, f\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{k\Psi}\left(\Phi - \frac{d\Psi}{dt}\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{\Phi}{k\Psi}\, dt. \tag{5}$$

Рассмотрим сначала случай когда $k > 0$. В силу наших предположений из (5) имеем устойчивый предельный цикл в кольце, где $\Psi < 0$, и неустойчивый в кольце, где $\Psi > 0$. Такоей же характер устойчивости будут иметь все особые траектории в рассматриваемых кольцах. То есть траектории системы (1) должны выходить из кольца, где $\Psi > 0$, и входить в кольца, где $\Psi < 0$. Полученное противоречие доказывает первую часть утверждения теоремы. При отрицательном *k* такого противоречия нет, следовательно, в каждом из $s-1$ внутренних колец при отсутствии особых точек есть точно по одному предельному циклу второго рода, еще по одному такому предельному циклу может быть в крайних кольцах. То есть всего не более $s+1$ предельного цикла системы (1) в области *D*, охватывающих цилиндр.

Следствие. Если в кольце, $\Psi > 0$ ($\Psi < 0$), существует предельный цикл второго рода, то он является устойчивым (неустойчивым) при $k\, sign(\Psi\Phi) < 0$ ($k\, sign(\Psi\Phi) > 0$).

Замечание 3. При $s = 0$ теорема 1 представляет собой классический критерий Дюлака.

Как и для системы (2), при таком подходе в замкнутой ограниченной области *D* функцию $\Psi(u, y)$ для системы (1) будем искать в виде линейной комбинации заданных базисных функций $\Psi_j(u, y)$:

$$\Psi = \Psi(u, y, C) = \sum_{j=1}^{n} C_j \Psi_j(u, y), \quad C_j = const, \quad C = (C_1, \ldots, C_n). \tag{6}$$

Тогда функция $\Phi(u, y)$ также является аналогичной линейной комбинацией известных функций Φ_j:

$$\Phi = \Phi(u, y, C) = \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(u, y). \tag{7}$$

В отличие от полиномиальных систем (2), когда базисные функции $\Psi_j(x, y)$ из (6) брались мономами $x^{r(j)} y^{s(j)}$, $0 \le r(j) + s(j) \le p$, $j = 1, \ldots, n$ [4], учитывая периодичность функций по *u*, для системы (1) функцию $\Psi(u, y)$ будем строить в виде

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n_0+1} y^{i-1} \left(\sum_{l=1}^{m_0} a_{il} \cos((l-1)u) + \sum_{l=1}^{m_0} b_{il} \sin((l-1)u) \right). \tag{8}$$

Объединяя коэффициенты $C_j = \begin{bmatrix} C[(i-1)m_0 + l] = a_{il}, \\ C[(i-1)m_0 + l + m_0(n_0+1)] = b_{il}, \end{bmatrix}$ в один массив длины $n = 2m_0(n_0+1)$, ищем функцию Ψ вида (8) с помощью метода редукции к сеточной задаче линейного программирования [7]

$$L \to \max, \quad \sum_{j=1}^{m} C_j \Phi_j (u_p, y_p) - L \geq 0, \quad \left| C_j \right| \leq 1, \tag{9}$$

на сетке узлов (u_p, y_p), $p = 1, \ldots, N_0$, взятой в области D. Затем средствами алгебры или анализа строго подтверждаем, что Ψ является функцией Дюлака системы (1) в области D, и применяем теорему 1.

3. Функция предельных циклов второго рода. Рассмотрим теперь систему (1)

$$\frac{du}{dt} = P(u, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u, y, a), \tag{10}$$

зависящую от скалярного параметра $a \in I \subset R$ для $(u, y) \in D \subset \Omega_c$. Для получения зависимости числа предельных циклов второго рода системы (10) от параметра в соответствии с [5, 6] введем следующее

Определение 2. Если различные предельные циклы $L(y)$ семейства (10) пересекают трансверсально гладкий отрезок $S := \{(u, y) \in \Omega_c : u = s(y),\ y_0 \leq y \leq y_1\}$ в различных точках $(s(y), y)$, то мы можем задать функцию $l : [y_0, y_1] \to R$ следующим образом

$$l(y) := m(s(y), y),$$

которая однозначным образом ставит в соответствие предельному циклу $L(y_i)$, пересекающему S в точке $(s(y_i), y_i)$, значение параметра a_i. Такая функция $a = l(y)$ называется функцией предельных циклов второго рода системы (10) [6].

Если параметр a поворачивает векторное поле системы (10) в Ω_c, то есть справедливо неравенство

$$(P)'_a Q - P(Q)'_a \geq 0 \ \ (\leq 0),$$

которое не является тождеством на любом предельном цикле системы (10), то функция $l(y)$ совпадает с функцией предельных циклов Андронова-Хопфа [5].

Алгоритм построения функции предельных циклов второго рода $l(y)$ системы (10), вычисляющий для заданного $y \in dom\, l$ соответствующее значение параметра $a = l(y)$, полностью аналогичен представленному в работе [6] для системы на плоскости, основанному на использовании метода Ньютона к отображению Пуанкаре и представляющему собой метод продолжения по параметру y_i.

Однако результаты численных расчетов функции $l(y)$ не всегда точны, поскольку могут не учитывать тонкую структуру ее поведения, например, в окрестности пары очень близких экстремумов. Ниже мы покажем, как проверять достоверность поведения функции $l(y)$ в окрестности точки простого экстремума и на промежутке монотонности.

Для этого функция $l(y)$, $y \in J = [y_0, y_1]$, например с помощью метода наименьших квадратов аппроксимируется полиномом или сплайн-функцией $l_p(y)$ подходящей степени. Функция $l_p(y)$ дает возможность приближенно найти области возрастания и убывания функции $l(y)$. Для этого разбиваем отрезок J на перекрывающие друг друга на своих концах отрезки J_v двух типов: 1) отрезки, соответствующие строго монотонному поведению функции $l(y)$; 2) отрезки, содержащие критические точки $l(y)$, которые соответствуют двукратным предельным циклам.

Рассмотрим сначала один из монотонных участков J_v функции $l = l(y)$, соответствующий грубому поведению системы (10).

Теорема 2. *Пусть для системы (10) при всех $a \in I = [a_1; a_2]$ выполняются условия:*

1) *параметр a поворачивает поле в области D;*
2) *существуют функции $C_j(a)$, $j = 1, \ldots, n$, а также функция*

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n} C_j(a) \Psi_j(u, y) \tag{11}$$

такие, что функция

$$\Phi(u, y, a) = \sum_{j=1}^{n} C_j(a) \Phi_j(u, y, a) > 0 \quad (u, y) \in D_v = 2\pi \times J_v. \tag{12}$$

Тогда, если семейство предельных циклов при $a \in I$ заполняет кольцеобразную область $D_v \subset D$, то она соответствует монотонной функции $l(y)$, и система (10) при каждом значении $a \in I$ имеет в области D_v точно один предельный цикл второго рода.

Теорема 3. *Пусть для системы (10) при всех $a \in I = [a_1; a_2]$ выполняются условия теоремы 2. Тогда, если траектории системы (10) при увеличении времени входят через границу ∂D_v извне вовнутрь* *области D_v (или наоборот), то в области Ω_0 имеется точно один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл второго рода системы (10).*

Более трудоемким является доказательство простоты точек экстремума, так как в них система (10) структурно неустойчива, и подходы, использовавшиеся для монотонных участков функции $l(y)$, соответствующих грубым системам, в этом случае не работают. Учитывая топологическую эквивалентность цилиндра Ω_c системы (1) и кольцеобразной области системы (2) на плоскости, здесь воспользуемся результатами работы [3], которые при соответствующих изменениях аналогично доказываются для рассматриваемого случая:

Теорема 4. *Система (10) не имеет предельных циклов второго рода кратности три и выше тогда и только тогда, когда система*

$$\frac{du}{dt} = P(u,y,a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u,y,a), \quad \frac{dz}{dt} = div\, v, \quad \frac{dw}{dt} = e^z H_2 \tag{13}$$

не имеет предельных циклов второго рода. Здесь

$$H_2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{PH_1}{H}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{QH_1}{H}\right), \quad H_1 = div\, v, \quad H = P^2 + Q^2, \tag{14}$$

функция $w(u,y,a) \in C^1(D)$ является 2π–периодической по u.

Если для системы (13) в качестве функции Пуанкаре [6] выбрать функцию $V = \Psi(u,y)e^z + \alpha w$, $\alpha \in R$,

$$\frac{dV}{dt} = \left(\Psi div\, v + \frac{d\Psi}{dt}\right)e^z + \alpha H_2 e^z = e^z\left(\Psi div\, v + \frac{d\Psi}{dt} + \alpha H_2\right),$$

то отсутствие в области D_v предельных циклов второго рода кратности выше двух у системы (10) сводится к выполнению условия

$$\Psi div\, v + \frac{d\Psi}{dt} + \alpha H_2 > 0, \quad (u,y) \in D_v, \quad a \in I. \tag{15}$$

Теорема 5. *Пусть система (10) при всех $a \in I = [a_1; a_2]$ удовлетворяет условиям:*

1) *параметр a поворачивает поле в области D_v, где $P(u,y,a) > 0$;*
2) *существуют функции $C_j(a)$, $j = 1,\ldots,n+1$, а также функция (14) такие, что функция*

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} C_j(a)\Phi_j(u,y,a) + C_{n+1}(a)H_2(u,y,a) > 0, \quad (u,y) \in D_v, \tag{16}$$

где $C_{n+1}(a) > 0 \ (< 0)$, и все рассматриваемые функции имеют необходимую гладкость;

3) *система (10) при $a = a_1(a_2)$ имеет в области D_v два предельных цикла, а при $a = a_2(a_1)$ она не имеет предельных циклов в области D_v.*

Тогда система (10) имеет в области D_v не более двух предельных циклов.

Доказательство. Если $P(u,y,a) > 0$ в области D_v, то систему (10) удобно записать в эквивалентной форме

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Q(u,y,a)}{P(u,y,a)} = R(u,y,a), \quad \frac{du}{dt} = 1. \tag{17}$$

Предельный цикл второго рода Γ системы (17) имеет кратность, равную [9]:

1) единице при $h_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial y} du \neq 0$;
2) двум при $h_1 = 0$, $h_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial y} du\right) du \neq 0$.

Тогда справедливость теоремы 5 для системы (17) вытекает, если положить $H_1 = \frac{\partial R}{\partial y}$ и $H_2 = \frac{\partial^2 R}{\partial y^2}$.

Таким образом, изучение поведения функции предельных циклов $l(y)$ будет проводиться нами с помощью построения функций Ψ вида (11), в каждой области D_v удовлетворяющих или условию (12) или условию (16).

Для выбора области D_v, соответствующей отрезку $J_v = [\alpha, \beta]$ из области определения функции $l(y)$, как и в случае систем на плоскости [5], используя отображение Пуанкаре, приближенно находим $l(\alpha) \approx a_1$, $l(\beta) \approx a_2$, $a_1 < l(\alpha)$, $a_2 > l(\beta)$. Затем однопараметрическое семейство систем (10) "погрузим" в двухпараметрическое семейство систем

$$\frac{du}{dt} = P(u,y) - \mu Q(u,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u,y) - \mu P(u,y), \tag{18}$$

в котором параметр μ строго поворачивает поле при $(u,y) \neq (0,0)$. Приближенно найдем предельные циклы Γ_i, $i = 1,2$, системы (18) при $a = a_i$, $\mu = \mu_i$, проходящие соответственно через точки $y = c < \alpha$, $u = 0$ и $y = b > \beta$, $u = 0$. Они существуют, если значение c достаточно близко к α, а b – к β. При сохранении определенной точности вычислений кривые Γ_1 и Γ_2 являются трансверсалями системы (10) соответственно при $a = a_1$, $a = a_2$ и образуют полосообразную область D_v, в которой находятся все предельные циклы системы (10), проходящие через точки $(0, y_0)$, $y_0 \in J_v$. В зависимости от вида и взаимного расположения предельных циклов, соответствующих функции $l(y)$, области D_v можно выбирать и без применения семейства (18).

Пусть по численному прогнозу функция $l(y)$ должна возрастать на отрезке $J_v = [\alpha, \beta]$, и это мы должны подтвердить строго алгебраическими методами. Для применения теоремы 2 выбрав в области D_v сетку, с помощью решения соответствующей задачи (9) численно находим коэффициенты $C_j(a_i)$ функции Черкаса Ψ вида (11) для каждого значения $a_i = a_1 + h \cdot i$, $i = \overline{0,l}$, $h = (a_2 - a_1)/l$, чтобы выполнялось неравенство (3). Затем по значениям $C_j(a_i)$ строим сглаживающие многочлены $C_j(a)$ подходящей степени на отрезке $[a_1, a_2]$. Если построенная таким образом функция $\Phi(x, y, a)$ удовлетворяет условию (12), то на основании теоремы 2 получаем доказательство возрастания функции $l(y)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Теперь пусть по численному прогнозу функция $l(y)$ имеет на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$ одну точку экстремума, и мы должны подтвердить это алгебраически. Сначала по выше описанной процедуре убедимся в справедливости теоремы 2 на соседних монотонных отрезках $[\alpha, \beta]$ и $[\alpha_2, \beta_2]$, значение α_1 выбираем достаточно близкое к β, а β_1 – к α_2, причем $\alpha_1 < \beta < \alpha_2 < \beta_1$.

При построении функции Пуанкаре *V* для применения теоремы 5 в окрестности точки экстремума, также как и в предыдущем случае, можно выбрать в области D_v сетку и при каждом значении $a_i = a_1 + h \cdot i$, $i = \overline{0,l}$, $h = (a_2 - a_1)/l$ на отрезке $[a_1, a_2]$, $a_1 \approx l(\alpha_1)$, $a_2 \approx l(\beta_1)$ с помощью решения соответствующей задачи (9) численно найти коэффициенты $C_j(a_i)$, при которых выполняется неравенство (18). По найденным значениям $C_j(a_i)$ строим сглаживающие многочлены подходящей степени $C_j(a)$. Если полученная функция $\Phi(u, y, a)$ удовлетворяет условию (19), то в силу теоремы 5 функция $l(y)$ на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$ имеет единственную точку экстремума.

4. Уравнение Абеля. Как известно [10], одна из ограниченных версий 16-й проблемы Гильберта посвящена уравнению Абеля

$$\frac{dy}{du} = y^n + \sum_0^{n-1} R_i(u) y^i, \quad y \in R, \quad u \in S^1,$$

где $R_i(u)$ являются непрерывными функциями. Задача заключается в нахождении верхней границы для числа предельных циклов данного уравнения, которая выражается только через *n*. Доказано, что при $n \leq 3$ число предельных циклов не превосходит *n*. При $n = 4$ уравнение Абеля может иметь сколь угодно много предельных циклов. В связи с этим накладывают дополнительное требование на его коэффициенты и рассматривают R_i в виде тригонометрических полиномов степени не выше *m*. Однако и в этом случае проблема не решена даже при $m = 1$. Поэтому в работе [7] исследовались предельные циклы уравнения Абеля вида

$$\frac{dy}{du} = (a_1 \cos u + a_2 \sin u + a_3) y + (b_1 \cos u + b_2 \sin u + b_3) y^2 + (c_1 \cos u + c_2 \sin u + c_3) y^3, \tag{19}$$

a_i, b_i, $c_i \in R$. В развитие результатов работы [7] нами был исследован ряд однопараметрических семейств уравнений вида (19), которые при определенных значениях параметра имеют три предельных цикла. Все вычисления проводились в компьютерной системе "Mathematica 5.2". В частности, для уравнения (19) при $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a$, $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $b_3 = -0.09$, $c_1 = -0.25$, $c_2 = -1/3$, $c_3 = 0.276$, где параметр a поворачивает поле на верхнем полуцилиндре $y > 0$, а функция (14) имеет вид $H_2 = 2R_2 + 6R_3 y$, с помощью предложенного алгоритма [6] на отрезке $[0.01; 0.15]$ приближенно построена функция предельных циклов второго рода, принимающая после аппроксимации по методу наименьших квадратов вид

$$l_9(y) = 0.0000098 + 0.0894y - 0.3559y^2 + 0.808959y^3 - 1.2868y^4 +$$
$$+1.48y^5 - 1.185y^6 + 0.61687y^7 - 0.186y^8 + 0.02468y^9.$$

Она возрастает при $y \in [0; 0.311663]$ и $y \in [0.927396; +\infty)$, убывает при $y \in [0.311663; 0.927396]$, $A(0.311663, 0.0090873)$ – точка максимума, $B(0.927396, 0.00678945)$ – точка минимума.

Применяя выше изложенные подходы, получено строгое подтверждение поведения представленной функции $l(y)$. Таким образом, рассмотренное уравнение Абеля на верхнем полуцилиндре имеет следующее число предельных циклов второго рода $N(a)$:

при $a \in (0; 0.00678945)$ имеем $N = 1$,

при $a \approx 0.00678945$ имеем $N = 2$ (один грубый и один двукратный полуустойчивый предельный цикл),

при $a \in (0.00678945; 0.0090873)$ имеем $N = 3$,

при $a \approx 0.0090873$ имеем $N = 2$ (один грубый и один двукратный полуустойчивый предельный цикл),

при $a \in (0.0090873; 0.01)$ имеем $N = 1$.

5. Заключение. Изложенные подходы к построению и исследованию функции предельных циклов второго рода позволяют получить точную оценку числа таких предельных циклов для некоторых однопараметрических семейств уравнения Абеля.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (Договор Ф07М-234).

Литература.

1. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1976. 496 с.

2. Барбашин, Е.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством / Е.А. Барбашин, В.А. Табуева. – М.: Наука, 1969. 300 с.

3. Черкас, Л.А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л.А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33. №5. – С.689 – 699.

4. Черкас, Л.А. Алгебраические аспекты нахождения функции Дюлака для полиномиальных автономных систем на плоскости / Л.А. Черкас, А.А. Гринь // Дифференциальные. уравнения. – 2001. – Т. 37, №3. – С.384 – 390.

5. Гринь, А.А. Экстремумы функции Андронова-Хопфа полиномиальной системы Льенара / А.А. Гринь, Л.А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. – №1. – С.50 – 60.

6. Cherkas, L.A. On the approximation of the limit cycles function / L.A. Cherkas, A.A. Grin, K. Schneider // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2007. – N. 28. – P. 1 – 11; http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/.

7. Alvarez, M.J. A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations / M.J. Alvarez, A.Gasull, H. Giacomini // Journal of Differential Equations. – 2007. – N. 234. – P. 161 – 176.

8. Черкас, Л.А. Функция Дюлака для динамических систем на цилиндре / Л.А. Черкас, А.А. Гринь // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. – 2007. – Серия 2. – №2(52). – С. 3 – 8.

9. Черкас, Л.А. Об использовании производных отображения Пуанкаре для оценки числа предельных циклов / Л.А. Черкас, А.А. Гринь // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. – 2006. – Серия 2. – №3(46). – С. 3 – 10.

10. Ilyashenko, Y. Centennial history of Hilbert's 16th problem / Y. Ilyashenko // Bulletin of the AMS. – 2002. – Vol. 39. – N. 3. – P. 301–354.

Гринь Александр Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой АГ и МПМ ГрГУ им. Я. Купалы.

The paper contains a new approach to obtain the exact evaluation of the number and localization of limit cycles surrounding the cylinder for autonomous systems with the cylindrical phase space. It is based on the investigation of the limit cycles function with the help of the Dulac-Cherkas and Poincare functions. Presented theoretical results are applied to parametric families of Abel equation.