Ю.Ю. Гнездовский, В.Н. Горбузов

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 514.116(035.5)
ББК 22.151.0я2
Г56

Гнездовский, Ю. Ю.

Г56 Тригонометрические системы / Ю.Ю. Гнездовский, В.Н. Горбузов. – 222 с.

ISBN

В пособии рассмотрены методы решения систем тригонометрических уравнений.

Предназначено для учителей математики и учащихся общеобразовательных школ, гимназий, лицеев и колледжей. Может быть использовано при обучении студентов педагогических специальностей вузов методам решения задач элементарной математики.

УДК 514.116(035.5)
ББК 22.151.0я2

ISBN

Введение

В современном школьном курсе математики рассматриваются только отдельные виды тригонометрических систем, поскольку данный материал сложный, но обязательный для изучения. Более основательно изучаются тригонометрические системы в классах с углубленным изучением математики, в гимназиях и лицеях. Однако предлагаемые на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения задачи, как правило, гораздо сложнее тех, которые приведены в учебниках.

При решении тригонометрических систем широко используются тригонометрические преобразования, свойства тригонометрических функций, методы решения тригонометрических уравнений, а также общие подходы решения систем, не обязательно тригонометрических. Наличие специфических особенностей порождает значительные трудности, для преодоления которых нужны теоретические знания и практические навыки.

Часто бывает не просто сделать первый шаг при решении тригонометрических систем, который, как правило, служит «ключом» к решению задачи. Какие-то общие рекомендации, а тем более общие методы, привести невозможно. В то же время целые классы систем решаются одинаковыми способами. Наиболее распространенными являются метод исключения одной из переменных и метод подстановки. Значительное место занимают подходы, когда посредством тригонометрических формул устанавливаются связки, позволяющие определить дальнейший ход решения. На примерах решения конкретных систем уравнений и отдельных классов систем приводятся подходы к решению.

Задачи подбирались так, чтобы их решение отражало и концентрировало в себе предлагаемый метод. При этом внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например условиям применимости той или иной формулы. Вместе с тем в ходе решения приводится возможный вариант оформления, что требует определенных знаний.

Значительная часть решенных задач взята со вступительных экзаменов в высшие учебные заведения, которые предлагают задачи высокого уровня сложности.

При использовании данного пособия необходимо учитывать следующие обстоятельства.

Пусть A — некоторое уравнение, неравенство, система или совокупность, B — также некоторое уравнение, неравенство, система или совокупность. При этом если A, например, неравенство, то B может быть уравнением, неравенством, системой и совокупностью.

Будем считать, что A *равносильно* B и запишем

$$\boldsymbol{A} \Longleftrightarrow \boldsymbol{B},$$

если множество решений A *является множеством решений* B, *а множество решений* B *является множеством решений* A.

Другими словами, A *и* B *равносильны тогда и только тогда, когда у* A *и* B *одно и то же множество решений.*

Приведем примеры отдельных равносильностей:

$$x + 12 \geqslant 0 \iff x \geqslant -12;$$

$$x + 3 = x^2 + 3 \iff x = x^2;$$

$$(x + 3{,}2)^2 = 0 \iff |x + 3{,}2| = 0 \iff x + 3{,}2 = 0;$$

$$(x+7)(x^2-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x + 7 = 0, \\ x^2 - 1 = 0; \end{array}\right.$$

$$(x^2 - 25)^2 + (x+5)^2 = 0 \iff \begin{cases} x^2 - 25 = 0, \\ x + 5 = 0; \end{cases}$$

$$\frac{x+5}{2-x} > 0 \iff (x+5)(2-x) > 0;$$

$$\sin x \geqslant 1 \iff \sin x = 1;$$

$$\cos x \leqslant -1 \iff \cos x = -1.$$

Символ $\iff$ будем использовать и вместо оборотов слов «тогда и только тогда, когда» и «если и только если».

Например, запись

$$\frac{5}{6} < \frac{7}{8} \iff 5 \cdot 8 < 6 \cdot 7$$

означает, что

$$\frac{5}{6} < \frac{7}{8} \text{ тогда и только тогда, когда } 5 \cdot 8 < 6 \cdot 7$$

или, что то же,

$$\frac{5}{6} < \frac{7}{8}, \text{ если и только если } 5 \cdot 8 < 6 \cdot 7.$$

Будем использовать весьма удобные при изложении материала *условные обозначения*:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел;

$\varnothing$ — пустое множество;

$\forall$ — для всех, при любых;

$\Longrightarrow$ — следовательно, если, то;

$\mathrm{D}(f)$ — область определения функции f;

$\mathrm{E}(f)$ — множество значений функции f.

Так, запись

$$|x| \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

читается:

$$|x| \geqslant 0 \text{ при любых } x \in \mathbb{R}$$

или

$$|x| \geqslant 0 \text{ при любом действительном } x.$$

Утверждение

$$\text{если } x = 2, \text{ то } |x| = 2$$

с помощью символа $\Longrightarrow$ записывается кратко:

$$x = 2 \Longrightarrow |x| = 2.$$

Среди числовых множеств будем выделять *числовые промежутки*. Это множества одного из видов:

$[a; b]$ при $a < b$ — *отрезок*;

$(a; b)$ — *интервал*;

$[a; b)$ и $(a; b]$ — *полуинтервалы*;

$(-\infty; b], (-\infty; b), [a; +\infty), (a; +\infty)$ — *числовые лучи*;

$(-\infty; +\infty)$ — *числовая прямая*.

Обратим внимание на еще одно обстоятельство.

Если требуется решить уравнение, неравенство, систему или совокупность, то такую задачу понимаем как нахождение их *множества решений*.

Например, неравенство $x^2 < -3$ не имеет решений. Поэтому его множеством решений является пустое множество. В ответе запишем: $\varnothing$.

У квадратного уравнения $x^2 = 5$ два корня: $x_1 = -\sqrt{5}$ и $x_2 = \sqrt{5}$. Его множество решений состоит из двух чисел $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$. В ответе запишем: $\left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$.

Система

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x - 1 \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 1 \end{cases} \iff -1 < x \leqslant 1,$$

а ее множеством решений является полуинтервал $(-1;1]$.

Совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x-2>1, \\ x-1 \leqslant -2 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x>3, \\ x \leqslant -1. \end{array}\right.$$

В ответе запишем: $(-\infty;\ -1] \cup (3;\ +\infty)$.

Неравенство $(x-1)^2 \geqslant 0$ выполняется при любом x. Множество действительных чисел является его множеством решений. В ответе запишем: $\mathbb{R}$ или $(-\infty;\ +\infty)$.

Множество решений систем и совокупностей, которые содержат две переменные, будем записывать в виде множества упорядоченных пар.

Например, система

$$\begin{cases} |x|-2=5, \\ y-1=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} |x|=7, \\ y=-1 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-7, \\ y=-1, \end{cases} \\ \begin{cases} x=7, \\ y=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

В ответе запишем: $\{(-7,\ -1),\ (7,\ -1)\}$.

§ 1. Метод исключения переменной

Приступая к решению тригонометрических систем, целесообразно проверить, нельзя ли из какого-либо уравнения системы выразить одну из неизвестных через другие и тем самым перейти к решению системы с меньшим числом уравнений или вовсе свести ее к одному уравнению. Такой метод решения систем уравнений называется *методом исключения переменной*.

Здесь же сразу следует оговорить, что наличие такой возможности не всегда позволяет избрать оптимальный путь решения. Иногда целесообразно выполнить некоторые преобразования уравнений, входящих в систему, а затем произвести исключение переменной; в отдельных случаях следует вовсе отказаться от метода исключения переменной и воспользоваться иным способом решения.

Задача 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\sin x - \cos(y + 47^\circ) = -3, \\ x + y = 43^\circ. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Из второго уравнения системы (1) выразим

$$y = 43^\circ - x$$

и подставим в первое уравнение этой системы:

$$4\sin x - \cos(43^\circ - x + 47^\circ) = -3 \iff 4\sin x - \cos(90^\circ - x) = -3 \iff$$

$$\iff 4\sin x - \sin x = -3 \iff \sin x = -1 \iff x = -90^\circ + 360^\circ \cdot k,$$

где k — любое целое число.

Тогда
$$y = 43^\circ - \bigl(-90^\circ + 360^\circ \cdot k\bigr) = 133^\circ - 360^\circ \cdot k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\bigl\{\bigl(-90^\circ + 360^\circ \cdot k,\ 133^\circ - 360^\circ \cdot k\bigr)\bigr\},\ \forall k \in \mathbb{Z}.$

Задача 2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \dfrac{3\pi}{2}\,. \end{cases} \tag{2}$$

Решение. С п о с о б 1. Из второго уравнения системы (2) выразим
$$y = \frac{3\pi}{2} - x.$$

Подставив в первое уравнение системы (2) вместо неизвестной y разность $\dfrac{3\pi}{2} - x$, получим тригонометрическое уравнение
$$3\sin 3x + \cos\Bigl(\frac{3\pi}{2} - x\Bigr) = -4 \iff 3\sin 3x - \sin x = -4.$$

Так как при любом действительном x
$$\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x =$$
$$= \sin x(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x \cos^2 x =$$
$$= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x(1 - \sin^2 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$
то
$$8\sin x - 12\sin^3 x = -4 \iff 3\sin^3 x - 2\sin x - 1 = 0 \iff$$
$$\iff (\sin x - 1)(3\sin^2 x + 3\sin x + 1) = 0.$$

Квадратный трехчлен $3\sin^2 x + 3\sin x + 1$ относительно $\sin x$ не равен нулю как имеющий отрицательный дискриминант $D = 9 - 12 = -3$. Поэтому
$$\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда из второго уравнения системы (2) находим, что

$$y = \frac{3\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \pi - 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, множество упорядоченных пар

$$\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \pi - 2\pi n\right)\right\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

является множеством решений системы (2).

С п о с о б 2. По свойству ограниченности тригонометрических функций синус и косинус имеют место оценки

$$\sin 3x \geqslant -1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{и} \quad \cos y \geqslant -1, \ \forall y \in \mathbb{R},$$

в соответствии с которыми первое уравнение системы (2) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin 3x = -1, \\ \cos y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi k}{3}, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = \pi + 2\pi m, \ \forall m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда решениями системы (2) являются те и только те из найденных значений неизвестных x и y, которые удовлетворяют второму уравнению системы (2):

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3} + \pi + 2\pi m = \frac{3\pi}{2} \iff k = -3m.$$

Итак, решениями системы (2) будут

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi m, \ \pi + 2\pi m\right), \ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Заменив m на $-n$, получим задание множества решений системы (2) в том виде, в котором оно получено при решении первым способом.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \pi - 2\pi n\right)\right\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$

Методом исключения переменной, но несколько сложнее, решается следующая тригонометрическая система. В ее случае сложности связаны прежде всего с нахождением множеств, на которых имеют место формулы, используемые при решении. Это влечет за собой требование особой аккуратности и умение правильно записать решение.

Задача 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}\,. \end{cases} \tag{3}$$

Решение. Из второго уравнения системы (3) устанавливаем, что

$$y = x - \frac{\pi}{6}\,.$$

Тогда, заменив в первом уравнении системы (3) неизвестную y на разность $x - \dfrac{\pi}{6}$, получим уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\,\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\Bigl(x - \frac{\pi}{6}\Bigr). \tag{4}$$

С помощью формулы тангенса разности

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,,$$

которая имеет смысл, когда $\alpha-\beta,\ \alpha,\ \beta$ не равны $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z},$ устанавливаем, что уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\Bigl(\dfrac{\pi}{4} - x\Bigr) = \operatorname{tg}\Bigl(x - \dfrac{\pi}{6}\Bigr), \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Используя формулу равенства тангенсов

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v \iff \begin{cases} u = v + \pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z}, \\ v \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - x = x - \dfrac{\pi}{6} + \pi m, \\ x - \dfrac{\pi}{6} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{24} - \dfrac{\pi}{2}\, m,\ \forall m \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \dfrac{2\pi}{3} + \pi l,\ \forall l \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

При целых l, m и n уравнение

$$\frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{2}\, m = \frac{2\pi}{3} + \pi l \iff 5 - 12m = 16 + 24l \iff 12(m + 2l) = -11,$$

а также уравнение

$$\frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{2}\, m = \frac{\pi}{2} + \pi n \iff 5 - 12m = 12 + 24n \iff 12(m + 2n) = -7$$

не имеют решений, так как числа $12(m + 2l)$ и $12(m + 2n)$ — четные, а числа -11 и -7 — нечетные.

Таким образом, корнями уравнения (4) будут

$$x = \frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{2}\, m,\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

или, что одно и то же,

$$x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{2}\, k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Из второго уравнения системы (3) находим, что

$$y = \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{2}\, k\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}\, k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, множество упорядоченных пар

$$\left\{\left(\frac{\pi}{24}\,(5 + 12k), \frac{\pi}{24}\,(1 + 12k)\right)\right\}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

является множеством решений системы (3).

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{24}\,(5 + 12k), \dfrac{\pi}{24}\,(1 + 12k)\right)\right\},\ \forall k \in \mathbb{Z}.$

В рассмотренных задачах методом исключения переменной данную систему сводили к тригонометрическому уравнению от одной переменной. Возможно приведение тригонометрической системы к алгебраической системе или к совокупности алгебраических систем.

Задача 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ x^2+y^2=2. \end{cases} \tag{5}$$

Решение. Из первого уравнения системы (5) находим, что

$$x+y=\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

При

$$x=\ -y+\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

второе уравнение системы (5) будет иметь вид

$$2y^2-2k\pi y+k^2\pi^2-2=0. \tag{6}$$

Таким образом, система (5) совместна, когда у квадратного уравнения (6) дискриминант неотрицательный:

$$16-4k^2\pi^2\geqslant 0 \iff k^2\leqslant\frac{4}{\pi^2} \iff |k|\leqslant\frac{2}{\pi}\,.$$

Это возможно лишь при $k=0$, так как $k\in\mathbb{Z}$, а $\dfrac{2}{\pi}<1$.

Если $k=0$, то уравнение (6) имеет вид:

$$2y^2-2=0 \iff y^2=1 \iff |y|=1 \iff y=\ \pm 1.$$

Следовательно, множество решений системы (5) состоит из двух упорядоченных пар $(\,-1,1)$ и $(1,\,-1)$.

Ответ: $\{(\,-1,1),(1,\,-1)\}$.

Задача 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} |x|+|y|=3, \\ \sin\dfrac{\pi x^2}{2}=1. \end{cases} \tag{7}$$

Решение. Из второго уравнения системы (7) находим, что

$$\frac{\pi x^2}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \iff x^2 = 1 + 4n \iff |x| = \sqrt{1+4n}\,,$$

где n — целое число, такое, что

$$1 + 4n \geqslant 0 \iff n \geqslant -\frac{1}{4}\,.$$

Значит, n — целое неотрицательное число.

Первое уравнение системы (7) приводим к виду

$$|y| = 3 - \sqrt{1+4n}\,.$$

Отсюда, в виду того что $|y| \geqslant 0$ при любом y, получаем:

$$\sqrt{1+4n} \leqslant 3 \iff 0 \leqslant 1 + 4n \leqslant 9 \iff -\frac{1}{4} \leqslant n \leqslant 2.$$

Следовательно, целое неотрицательное число $n = 0$, или $n = 1$, или $n = 2$.

Таким образом, система (7) равносильна совокупности трех систем:

$$\begin{cases} |x| = 1, \\ |y| = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| = \sqrt{5}\,, \\ |y| = 3 - \sqrt{5}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| = 3, \\ |y| = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим множество решений системы (7), которое состоит из десяти упорядоченных пар:

$$(-1, -2),\ (-1, 2),\ (1, -2),\ (1, 2),\ (-\sqrt{5}\,, \sqrt{5} - 3),$$

$$(-\sqrt{5}\,, 3 - \sqrt{5}\,),\ (\sqrt{5}\,, \sqrt{5} - 3),\ (\sqrt{5}\,, 3 - \sqrt{5}\,),\ (-3, 0),\ (3, 0).$$

Ответ: $\big\{(-1, -2),\ (-1, 2),\ (1, -2),\ (1, 2),\ (-\sqrt{5}\,, \sqrt{5} - 3),$

$(-\sqrt{5}\,, 3 - \sqrt{5}\,),\ (\sqrt{5}\,, \sqrt{5} - 3),\ (\sqrt{5}\,, 3 - \sqrt{5}\,),\ (-3, 0),\ (3, 0)\big\}.$

Задача 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y), \\ |x| + |y| = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Решение. Первое уравнение системы (8) равносильно уравнению

$$2\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}=2\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x+y}{2}\iff$$

$$\iff 2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=0\iff$$

$$\iff 4\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\Bigl(-\frac{y}{2}\Bigr)\sin\frac{x}{2}=0\iff \sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{y}{2}\,\sin\frac{x+y}{2}=0.$$

Тогда система (8) равносильна совокупности трех систем:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{x}{2}=0,\\ |x|+|y|=1\end{cases}\iff\begin{cases}x=2\pi k,\\ |x|+|y|=1,\ \forall k\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\dfrac{y}{2}=0,\\ |x|+|y|=1\end{cases}\iff\begin{cases}y=2\pi k,\\ |x|+|y|=1,\ \forall k\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\dfrac{x+y}{2}=0,\\ |x|+|y|=1\end{cases}\iff\begin{cases}x+y=2\pi k,\\ |x|+|y|=1,\forall k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Первая система совокупности имеет решения только при $k=0$ (при других k модуль $|x|>1$), и ее решениями будут упорядоченные пары чисел

$$(0,-1)\ \text{ и }\ (0,1).$$

Аналогично получаем решения второй системы совокупности в виде упорядоченных пар

$$(-1,0)\ \text{ и }\ (1,0).$$

Третья система совокупности имеет решения только при $k=0,$ так как при других k модуль $|2\pi k|>6$ и

$$|x|+|y|\geqslant|x+y|=|2\pi k|>6.$$

Следовательно,

$$
\begin{cases} x+y=0, \\ |x|+|y|=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x, \\ 2|x|=1 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-0{,}5, \\ y=0{,}5, \end{cases} \\ \begin{cases} x=0{,}5, \\ y=-0{,}5. \end{cases} \end{array}\right.
$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)\right\}$.

В некоторых случаях, прежде чем исключить переменную, бывает полезно выполнить некоторые преобразования.

Задача 7. Решите систему уравнений:

$$
\begin{cases} \sin x\cos y+\sin^2\frac{x}{2}\,\sin y=\cos^2\frac{x}{2}\,\sin y, \\ 2x-y=\frac{\pi}{2}\,. \end{cases} \tag{9}
$$

Решение. Первое уравнение системы (9) равносильно уравнению

$$
\sin x\cos y-\sin y\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=0 \iff
$$

$$
\iff \sin x\cos y-\sin y\cos x=0 \iff \sin(x-y)=0.
$$

Тогда система (9) равносильна системе

$$
\begin{cases} \sin(x-y)=0, \\ 2x-y=\frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=2x-\frac{\pi}{2}\,, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0 \end{cases} \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} y=2x-\frac{\pi}{2}\,, \\ \cos x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, \\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \end{cases}
$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{2}\,(2n+1), \frac{\pi}{2}\,(4n+1)\right)\right\}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Задача 8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin\big(\pi(x-y)\big) + \sqrt{3}\,\cos\big(\pi(x-y)\big) = -2, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{25}{72}\,. \end{cases} \tag{10}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы (10):

$$\frac{1}{2}\,\sin\big(\pi(x-y)\big) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos\big(\pi(x-y)\big) = -1 \iff$$

$$\iff \sin\big(\pi(x-y)\big)\cos\frac{\pi}{3} + \cos\big(\pi(x-y)\big)\sin\frac{\pi}{3} = -1 \iff$$

$$\iff \sin\Big(\pi\Big(x-y+\frac{1}{3}\Big)\Big) = -1 \iff \pi\Big(x-y+\frac{1}{3}\Big) = \pi\Big(-\frac{1}{2}+2k\Big) \iff$$

$$\iff x-y = -\frac{5}{6} + 2k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Из второго уравнения системы (10) следует, что

$$x^2 = \frac{25}{72} - y^2 \implies x^2 \leqslant \frac{25}{72} \iff |x| \leqslant \frac{5}{6\sqrt{2}} \iff -\frac{5\sqrt{2}}{12} \leqslant x \leqslant \frac{5\sqrt{2}}{12}\,.$$

Аналогично получаем оценку:

$$-\frac{5\sqrt{2}}{12} \leqslant y \leqslant \frac{5\sqrt{2}}{12} \iff -\frac{5\sqrt{2}}{12} \leqslant -y \leqslant \frac{5\sqrt{2}}{12}\,.$$

Следовательно,

$$-\frac{5\sqrt{2}}{6} \leqslant x-y \leqslant \frac{5\sqrt{2}}{6}\,.$$

Значит,

$$-\frac{5\sqrt{2}}{6} \leqslant -\frac{5}{6} + 2k \leqslant \frac{5\sqrt{2}}{6} \iff \frac{5(1-\sqrt{2}\,)}{12} \leqslant k \leqslant \frac{5(1+\sqrt{2}\,)}{12}\,.$$

Так как

$$50 < 289 \iff \sqrt{50} < \sqrt{289} \iff 5\sqrt{2} < 17 \iff$$

$$\iff -5\sqrt{2} > -17 \iff 5 - 5\sqrt{2} > -12 \iff \frac{5(1-\sqrt{2})}{12} > -1,$$

а

$$50 > 49 \iff 5\sqrt{2} > 7 \iff 5 + 5\sqrt{2} > 12 \iff \frac{5(1+\sqrt{2})}{12} > 1,$$

но

$$50 < 361 \iff 5\sqrt{2} < 19 \iff 5 + 5\sqrt{2} < 24 \iff \frac{5(1+\sqrt{2})}{12} < 2,$$

то целое число $k = 0$ или $k = 1$.

Если $k = 0$, то $x - y = -\frac{5}{6}$.

Подставив $x = y - \frac{5}{6}$ во второе уравнение системы (8), получим:

$$\left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{72} \iff 2y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{25}{36} - \frac{25}{72} = 0 \iff$$

$$\iff y^2 - \frac{5}{6}y + \frac{25}{144} = 0 \iff \left(y - \frac{5}{12}\right)^2 = 0 \iff y = \frac{5}{12}.$$

Тогда

$$x = \frac{5}{12} - \frac{5}{6} = -\frac{5}{12}.$$

Следовательно, упорядоченная пара $\left(-\frac{5}{12}, \frac{5}{12}\right)$ будет решением системы (10).

Если $k = 1$, то $x - y = \frac{7}{6}$.

Подставив $x = y + \frac{7}{6}$ во второе уравнение системы (10), получим:

$$\left(y + \frac{7}{6}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{72} \iff 2y^2 + \frac{7}{3}y + \frac{49}{36} - \frac{25}{72} = 0 \iff$$

$$\iff y^2 + 2\cdot\frac{7}{12}y + \frac{49}{144} - \frac{49}{144} + \frac{73}{144} = 0 \iff \left(y + \frac{7}{12}\right)^2 + \frac{24}{144} = 0.$$

Это уравнение не имеет решений, так как выражение в его левой части положительное при любом y.

Ответ: $\left\{\left(-\frac{5}{12}, \frac{5}{12}\right)\right\}$.

Рассмотренные в задачах $1-8$ системы состояли из одного тригонометрического уравнения и одного алгебраического уравнения. Методом исключения переменной решаются и системы, у которых каждое уравнение содержит тригонометрические функции.

Задача 9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\sin x\sin y + \cos x = 0, \\ 1 + \sin y\cos x = 2\cos^2 y\sin x. \end{cases} \tag{11}$$

Решение. Из первого уравнения системы (11) находим, что

$$\cos x = -2\sin x\sin y.$$

Тогда из второго уравнения системы (11) получаем:

$$1 + \sin y(-2\sin x\sin y) = 2\cos^2 y\sin x \iff$$

$$\iff 1 = 2\sin x(\sin^2 y + \cos^2 y) \iff \sin x = \frac{1}{2}.$$

Система (11) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin x = 0{,}5, \\ \cos x = -2\sin y\sin x \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = 0{,}5, \\ \sin y = -\cos x. \end{cases}$$

Поскольку уравнение

$$\sin x = 0{,}5 \iff \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ &x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}\right.$$

то система (11) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ \sin y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = (-1)^{n} \cdot \dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\Big\{\Big(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi p\Big), \Big(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi p\Big),$

$\Big(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi p\Big), \Big(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi p\Big)\Big\},\ \forall k, p \in \mathbb{Z}.$

Задача 10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, \\ \sin 2y - \sqrt{2}\, \sin x = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Решение. Поскольку тригонометрическая система

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0, \\ 1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} y, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 y = 0 \end{cases}$$

не имеет решений, так как сумма $1 + a^2 \neq 0$ при любом $a \in \mathbb{R}$, то возможно деление первого уравнения системы (12) на $1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

В результате получаем, что первое уравнение системы (12) равносильно уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = 1. \tag{13}$$

Использовав формулу тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

которая имеет место, когда $\alpha+\beta,\ \alpha,\ \beta$ не равны $\dfrac{\pi}{2}+\pi l,\ \forall l\in\mathbb{Z},$ устанавливаем, что уравнение (13) равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}(x+y)=1 \iff x+y=\frac{\pi}{4}+\pi m \iff$$

$$\iff y=-x+\frac{\pi}{4}+\pi m,\ \forall m\in\mathbb{Z}, \tag{14}$$

при условии, что

$$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}, \tag{15}$$

$$y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

При любых целых m и k

$$\frac{\pi}{2}+\pi k\neq -x+\frac{\pi}{4}+\pi m \iff x\neq -\frac{\pi}{4}+\pi(m-k) \iff$$

$$\iff x\neq -\frac{\pi}{4}+\pi p,\ \forall p\in\mathbb{Z}. \tag{16}$$

Таким образом, из первого уравнения системы (12) получено, что неизвестная y выражается через неизвестную x по формуле (14) при условии, что неизвестная x удовлетворяет неравенствам (15) и (16).

Заменой (14) второе уравнение системы (12) приводим к виду

$$\sin\Big(-2x+\frac{\pi}{2}+2\pi m\Big)-\sqrt{2}\sin x=1 \iff$$

$$\iff \cos 2x-\sqrt{2}\sin x-1=0 \iff (1-\cos 2x)+\sqrt{2}\sin x=0 \iff$$

$$\iff 2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x=0 \iff \sqrt{2}\sin x(1+\sqrt{2}\sin x)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\pi s,\\ x=(-1)^{s+1}\cdot\dfrac{\pi}{4}+\pi s,\ \forall s\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Поскольку неизвестная x такая, что выполняются неравенства (15) и (16), а $(-1)^{s+1}\cdot\dfrac{\pi}{4}+\pi s=-\dfrac{\pi}{4}+\pi p$ при $s=p=2r,\ r\in\mathbb{Z},$ то из всего множества полученных значений x системе (12) удовлетворяют лишь

$$x = \pi s,\ \forall s \in \mathbb{Z}, \ \text{ и } \ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi r,\ \forall r \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, решениями системы (12) будут:

$$\begin{cases} x = \pi s, \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \pi(m - s),\ \forall m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi s,\ \forall s \in \mathbb{Z}, \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \pi q,\ \forall q \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi(2r + 1), \\ y = \pi(m - 2r - 1),\ \forall m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi(2r + 1),\ \forall r \in \mathbb{Z}, \\ y = \pi q,\ \forall q \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\pi r, \dfrac{\pi}{4}(4q+1)\right), \left(\dfrac{\pi}{4}(8r+5), \pi q\right)\right\},\ \forall r, q \in \mathbb{Z}.$

Одна из специфических особенностей тригонометрических систем состоит в составлении множества решений.

В задачах $4 - 6$ и 8 множество решений тригонометрической системы состоит из конечного числа упорядоченных пар; в задачах $1 - 3$, 7, 9 и 10 множество решений бесконечно.

В задачах $1 - 3$ и 7 множество решений составлено с использованием *одного* целочисленного параметра, а в задачах 9 и 10 множество решений системы составлено с использованием *двух* целочисленных параметров.

Каждое из этих множеств решений предопределено системой, отражает ее суть и получено вполне обоснованно.

Возможный характер ошибок в этой специфической особенности тригонометрических систем рассмотрим на основании задачи 10.

Если в равенствах $x = \pi s$ и $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi r$ вместо s и r написать m, т.е. тот параметр, который был уже использован в записи $y = -x + \dfrac{\pi}{4} + \pi m$, то получим значения:

$$x = \pi m,\ y = -\pi m + \frac{\pi}{4} + \pi m = \frac{\pi}{4}\,,\ \forall m \in \mathbb{Z},$$

и

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m,\ y = -\frac{5\pi}{4} - 2\pi m + \frac{\pi}{4} + \pi m = -\pi(m+1),$$

где m — любое целое число.

Они будут решениями системы (12). Однако эти числа составляют лишь часть решений системы (12).

Рассуждаем следующим образом.

Поскольку $y = -x + \dfrac{\pi}{4} + \pi m,$ а при каждом фиксированном целом m переменная $x = \pi s,$ где s — любое целое число, то значение переменной

$$y = -\pi s + \frac{\pi}{4} + \pi m = \frac{\pi}{4} + \pi(m - s)$$

при выделенном целом m и произвольном целом s.

В силу произвольности выбора m может быть любым целым числом, поэтому решениями системы (12) будут все упорядоченные пары чисел

$$\left(\pi s, \frac{\pi}{4} + \pi q\right),\ \forall s, q \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично для $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi r,\ \forall r \in \mathbb{Z},$ при каждом фиксированном целом m получаем множество значений переменной

$$y = -\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi r\right) + \frac{\pi}{4} + \pi m = \pi(m - 2r - 1),$$

где r — любое целое число.

Далее, учитывая, что рассуждения проводились для произвольного целого числа m, заключаем, что при любых целых r и q упорядоченные пары чисел $\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi(2r+1), \pi q\right)$ будут решениями системы (12).

В задачах 1 − 10 системы методом исключения переменной сводились к решению одного уравнения.

Методом исключения переменной можно тригонометрическую систему привести к системе с меньшим числом уравнений.

Задача 11. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=\pi, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6. \end{cases} \tag{17}$$

Решение. Из первого уравнения системы (17) выражаем

$$z = \pi - (x+y).$$

При этом

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg}\big(\pi-(x+y)\big) = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg}(x+y) = -6 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \operatorname{tg} y \cdot \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y = 12 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ 3+\operatorname{tg}^2 y = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ \operatorname{tg}^2 y = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3, \\ |\operatorname{tg} y| = 3 \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \operatorname{tg} y = -3, \\ \operatorname{tg} x = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg} y = 3, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \\ y = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \\ y = \operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \end{array}\right.$$

Значит, множество упорядоченных троек

$$\Big\{\Big(-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi k,\ \frac{5\pi}{4}+\operatorname{arctg}3-\pi(n+k)\Big),$$

$$\Big(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi k,\ \frac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg}3-\pi(n+k)\Big)\Big\},\ \forall k,n\in\mathbb{Z}$$

является множеством решений системы (17).

Пусть

$$A=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}A=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)=\frac{\operatorname{tg}\operatorname{arctg}2+\operatorname{tg}\operatorname{arctg}3}{1-\operatorname{tg}\operatorname{arctg}2\operatorname{tg}\operatorname{arctg}3}=\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1.$$

Найдем A по заданному значению тангенса этого аргумента.

Для того чтобы эта задача разрешалась однозначно, нужно указать пределы изменения A.

Так как

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}\,,\quad \frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2}\,,$$

то сумма арктангенсов

$$\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3<\pi.$$

Значит, из равенства $\operatorname{tg}A=-1$ следует, что $A=\dfrac{3\pi}{4}$, т.е.

$$\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\frac{3\pi}{4}\,.$$

Отсюда

$$\frac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg}3=\operatorname{arctg}2,\quad \text{а}\quad \operatorname{arctg}3-\frac{3\pi}{4}=-\operatorname{arctg}2,$$

и множество решений системы (17) состоит из упорядоченных троек

$$\Big(-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi k,\ -\operatorname{arctg}2-\pi(n+k-2)\Big),$$

$$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi k,\ \operatorname{arctg}2-\pi(n+k)\right),\ \forall k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi k,\ -\operatorname{arctg}2-\pi(n+k-2)\right),\right.$

$$\left.\left(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}3+\pi k,\ \operatorname{arctg}2-\pi(n+k)\right)\right\},\ \forall k,n\in\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим случай, когда исключением переменной не получаем оптимальный путь решения тригонометрической системы уравнений.

Задача 12. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}\,,\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\,.\end{cases}\tag{18}$$

Решение. Тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\iff\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}\right)}{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}}-\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x+y}{2}}=0\iff$$

$$\iff\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}\left(\cos\dfrac{x+y}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}\right)}{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}}=0\iff$$

$$\iff\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}\right)}{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}}=0\iff$$

$$\iff\frac{\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}}=0\iff\begin{cases}\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{x+y}{2}=0,\\ \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}\neq 0.\end{cases}$$

Второе уравнение системы (18)

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

При этом $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ и $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, значит, первое уравнение системы (18) равносильно тому, что

$$\sin\frac{y}{2}\,\sin\frac{x+y}{2} = 0, \quad \text{а} \quad \cos\frac{y}{2}\,\cos\frac{x+y}{2} \neq 0.$$

Если $\sin\frac{y}{2} = 0$, то $\cos\frac{y}{2} \neq 0$.

Уравнение

$$\sin\frac{y}{2} = 0 \iff y = 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

значит, упорядоченные пары

$$\left(-\frac{\pi}{3} + \pi k,\ 2\pi n\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{\pi}{3} + \pi k,\ 2\pi n\right)$$

при любых целых k и n являются решениями системы (18), так как

$$\cos\frac{x+y}{2} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\,k + \pi n\right) \neq 0.$$

Если $\sin\frac{x+y}{2} = 0$, то $\cos\frac{x+y}{2} \neq 0$.

Уравнение

$$\sin\frac{x+y}{2} = 0 \iff x + y = 2\pi n \iff y = -x + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Если $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, то $y = \frac{\pi}{3} + \pi(2n-k)$, $\forall k, n \in \mathbb{Z}$.

Если $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, то $y = -\frac{\pi}{3} + \pi(2n-k)$, $\forall k, n \in \mathbb{Z}$.

Если $y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(2n-k)$, то

$$\cos\frac{y}{2} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\,(2n-k)\right) \neq 0,\ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, упорядоченные пары чисел

$$\Big(-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \frac{\pi}{3}+\pi(2n-k)\Big),\ \Big(\frac{\pi}{3}+\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+\pi(2n-k)\Big),\ \forall k,n\in\mathbb{Z},$$

являются решениями системы (18).

Ответ: $\Big\{\Big(-\frac{\pi}{3}+\pi k, 2\pi n\Big),\ \Big(-\frac{\pi}{3}+\pi k, \frac{\pi}{3}+\pi(2n-k)\Big),$

$\Big(\frac{\pi}{3}+\pi k, 2\pi n\Big),\ \Big(\frac{\pi}{3}+\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+\pi(2n-k)\Big)\Big\},\ \forall k,n\in\mathbb{Z}.$

Замечание 1. Второе уравнение системы (18)

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Это позволяет исключить переменную x, приведя первое уравнение системы (18) к уравнениям:

$$\operatorname{tg}\Big(\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\Big)+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{tg}\Big(\frac{y}{2}\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\Big),\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Эти тригонометрические уравнения решаются весьма не компактно. Поэтому метод исключения переменной в случае системы (18) нельзя считать предпочтительным в сравнении с предложенным.

Задача 13. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=0, \\ \cos(x-y-z)=0{,}5, \\ x+y+z=\pi. \end{cases} \tag{19}$$

Решение. Методом исключения переменной, выразив из третьего уравнения системы (19)

$$z=\pi-(x+y)$$

и подставив полученный результат в первое и второе уравнения системы (19), получим систему из двух тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\operatorname{ctg}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{x+y}{2}\Big)=0, \\ \cos\big(x-y-\pi+(x+y)\big)=0{,}5 \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}, \\ \cos 2x=-0{,}5. \end{cases}$$

Полученная система решена в предыдущей задаче.

На основании множества решений системы (18), учитывая то, как неизвестная z выражается из третьего уравнения системы (19) через неизвестные x и y, находим множество решений системы (19).

Ответ:

$$\Big\{\Big(-\frac{\pi}{3}+\pi k, 2\pi n, \frac{4\pi}{3}-\pi(k+2n)\Big),\ \Big(-\frac{\pi}{3}+\pi k, \frac{\pi}{3}+\pi(2n-k), \pi(1-2n)\Big),$$

$$\Big(\frac{\pi}{3}+\pi k, 2\pi n, \frac{2\pi}{3}-\pi(k+2n)\Big),\ \Big(\frac{\pi}{3}+\pi k, -\frac{\pi}{3}+\pi(2n-k), \pi(1-2n)\Big)\Big\},$$

где k и n — любые целые числа.

Рассмотрим систему, на примере которой покажем еще один специфический подход в решении тригонометрических систем, который часто предпочтительнее метода исключения переменной.

Задача 14. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \dfrac{1}{2}\,, \\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}\,. \end{cases} \tag{20}$$

Решение. С п о с о б 1. Уравнения

$$\cos(x-y) = \frac{1}{2} \iff x-y = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\cos(x+y) = -\frac{1}{2} \iff x+y = \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Система (20) равносильна совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x-y = \dfrac{\pi}{3}+2\pi n, \\ x+y = \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2}+\pi(k+n), \\ y = \dfrac{\pi}{6}+\pi(k-n),\ \forall k,n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(k+n), \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + \pi(k-n), \ \forall k, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi(k+n), \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi(k-n), \ \forall k, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x + y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + \pi(k+n), \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(k-n), \ \forall k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

С п о с о б 2. Из первого уравнения системы (20) находим, что

$$\cos(x-y) = \frac{1}{2} \iff x-y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \iff x = y \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда система (20) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \cos\Big(2y + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\Big) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \cos\Big(2y + \dfrac{\pi}{3}\Big) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ 2y + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l, \end{cases} \\ \begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ 2y + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi(2n + l), \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \pi l, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi(2n + l), \\ y = -\dfrac{\pi}{2} + \pi l, \ \forall n, l \in \mathbb{Z}; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x = y - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \cos\Big(2y - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\Big) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \cos\Big(2y - \dfrac{\pi}{3}\Big) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ 2y - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l, \end{cases} \\ \begin{cases} x = y - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ 2y - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi l \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi(2n + l), \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi l, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + \pi(2n + l), \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \pi l, \ \forall n, l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Если заменить целое число l на разность $k - n$ целых чисел k и $n,$ то полученные решения системы (20) приведем к видам, которые они имеют в способе 1.

Наоборот, если в решениях системы (20), найденных способом 1, заменить целое число k на сумму $l + n$ целых чисел l и $n,$ то получим решения этой системы, найденные способом 2.

Такие замены правомочны, так как $k,\ l,\ n$ — любые целые числа.

Ответ:

$$\Big\{ \Big(\frac{\pi}{2} + \pi(k+n), \frac{\pi}{6} + \pi(k-n)\Big), \Big(-\frac{\pi}{6} + \pi(k+n), -\frac{\pi}{2} + \pi(k-n)\Big),$$

$$\Big(\frac{\pi}{6} + \pi(k+n), \frac{\pi}{2} + \pi(k-n)\Big), \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi(k+n), -\frac{\pi}{6} + \pi(k-n)\Big)\Big\}, \ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 2. Во втором способе решения легко допустить ошибку, осуществив при $x = y \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,$ где n — любое целое число, во втором уравнении системы (20) следующий переход:

$$\cos\Big(2y \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\Big) = -\frac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{l} \cos\Big(2y + \dfrac{\pi}{3}\Big) = -\dfrac{1}{2}\,, \\ \cos\Big(2y - \dfrac{\pi}{3}\Big) = -\dfrac{1}{2}\,. \end{array} \right.$$

При этом не указав, что уравнение

$$\cos\left(2y+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

рассматривается при $x = y + \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z},$ а уравнение

$$\cos\left(2y-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

рассматривается при $x = y - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$

Оценивая два способа решения, можем констатировать, что, отказавшись от метода исключения переменной в рассмотренной задаче, нашли более оптимальный и простой метод ее решения.

В этом и заключается еще один специфический подход к решению систем тригонометрических уравнений: *проведение таких тождественных преобразований, после которых одно или несколько уравнений распадаются на простейшие уравнения видов*:

$$\sin(\alpha x + \beta y) = a,\ \ \cos(\alpha x + \beta y) = a,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha x + \beta y) = a,\ \ \operatorname{ctg}(\alpha x + \beta y) = a.$$

Приведем решения, основанные на таком подходе.

Задача 15. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 3\sin x\cos y - 1, \\ \sin(x+y) = -2\cos x\sin y. \end{cases} \tag{21}$$

Решение. Система (21) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin x\cos y - \cos x\sin y = 3\sin x\cos y - 1, \\ \sin x\cos y + \cos x\sin y = -2\cos x\sin y \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2\sin x\cos y + \sin y\cos x = 1, \\ \sin x\cos y + 3\sin y\cos x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -5\sin x\cos y = -3, \\ -5\sin y\cos x = 1 \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{3}{5}, \\ \sin y \cos x = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = \dfrac{2}{5}, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{2}{5}, \\ \sin(x-y) = \dfrac{4}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = (-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{2}{5} + \pi n, \\ x-y = (-1)^m \cdot \arcsin\dfrac{4}{5} + \pi m \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\Big((-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{2}{5} + (-1)^m \cdot \arcsin\dfrac{4}{5} + \pi(n+m)\Big), \\ y = \dfrac{1}{2}\Big((-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{2}{5} + (-1)^{m+1} \cdot \arcsin\dfrac{4}{5} + \pi(n-m)\Big), \end{cases}$$

где m и n — любые целые числа.

Ответ: $\Big\{\Big(\dfrac{1}{2}\Big((-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{2}{5} + (-1)^m \cdot \arcsin\dfrac{4}{5} + \pi(n+m)\Big),$

$\dfrac{1}{2}\Big((-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{2}{5} + (-1)^{m+1} \cdot \arcsin\dfrac{4}{5} + \pi(n-m)\Big)\Big)\Big\}$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 16. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 x \sin y - \sin x \cos x \cos y - \sin x \cos(x-y) = 0, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2y = 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Решение. Первое уравнение системы (22) равносильно уравнению

$$\cos^2 x \sin y - \sin x(\cos x \cos y + \cos x \cos y + \sin x \sin y) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \cos^2 x \sin y - \sin^2 x \sin y - 2 \sin x \cos x \cos y = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sin y \cos 2x - \cos y \sin 2x = 0 \Longleftrightarrow \sin(y-2x) = 0.$$

Второе уравнение системы (22) равносильно уравнению

$$\frac{\sin x\cos 2y+\cos x\sin 2y}{\cos x\cos 2y}=0 \iff \frac{\sin(x+2y)}{\cos x\cos 2y}=0.$$

Тогда система (22) равносильна системе

$$\begin{cases}\sin(y-2x)=0,\\ \sin(x+2y)=0,\\ \cos x\cos 2y\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}y-2x=\pi n,\\ 2y+x=\pi m,\\ \cos x\cos 2y\neq 0\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{5}\,(m-2n),\\ y=\dfrac{\pi}{5}\,(2m+n),\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},\\ y\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\,s,\ \forall s\in\mathbb{Z},\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{5}\,(m-2n),\\ y=\dfrac{\pi}{5}\,(2m+n),\ \forall m,n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Все полученные значения неизвестных x и y являются решениями системы (22), так как если допустить равенство

$$\frac{\pi}{5}\,(m-2n)=\frac{\pi}{2}+\pi k \iff m-2n-5k=\frac{5}{2}$$

и равенство

$$\frac{\pi}{5}\,(2m+n)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\,s \iff 4m+2n-5s=\frac{5}{2}\,,$$

то всякий раз получим противоречие, состоящее в том, что алгебраическая сумма целых чисел является дробным числом 2,5.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{5}\,(m-2n),\ \dfrac{\pi}{5}\,(2m+n)\right)\right\},\ \forall m,n\in\mathbb{Z}.$

§ 2. Метод подстановки (замены переменных)

Следующий распространенный подход в решении тригонометрических систем состоит в замене переменных.

Если система содержит несколько комбинаций тригонометрических функций или приводится к такого вида системе, то следует проверить возможность сведения этой системы к более простой системе (в частности, к алгебраической) путем обозначения этих комбинаций новыми переменными.

Задача 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 4\sin y = -11, \\ -2x + 5\sin y = \dfrac{7}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Подстановкой

$$\sin y = u$$

тригонометрическую систему (1) приводим к линейной системе

$$\begin{cases} 3x + 4u = -11, \\ -2x + 5u = \dfrac{7}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2\cdot 4u + 3\cdot 5u = 2\cdot(-11) + 3\cdot\dfrac{7}{2}, \\ 5\cdot 3x - 4\cdot(-2x) = 5\cdot(-11) - 4\cdot\dfrac{7}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 23u = -\dfrac{23}{2}, \\ 23x = -69 \end{cases} \iff \begin{cases} u = -\dfrac{1}{2}, \\ x = -3. \end{cases}$$

Тогда система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} x = -3, \\ \sin y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3, \\ y = (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\pi}{6} + \pi m, \ \forall m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(-3, (-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\pi}{6} + \pi m\right)\right\}, \ \forall m \in \mathbb{Z}.$

Задача 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3-\sqrt{2}\,)\operatorname{tg} 5y = \dfrac{1}{2}\,(3\sqrt{2}-1), \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3-\sqrt{2}\,)\sin(-2x) = \dfrac{1}{2}\,(3\sqrt{2}-1). \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Подстановкой

$$\sin(-2x) = u, \quad \operatorname{tg} 5y = v$$

тригонометрическую систему (2) приводим к алгебраической системе

$$\begin{cases} u^2 - (3-\sqrt{2}\,)v = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}\,, \\ v^2 + (3-\sqrt{2}\,)u = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}\,. \end{cases} \qquad (3)$$

Из системы (3) получаем, что

$$u^2 - (3-\sqrt{2}\,)v = v^2 + (3-\sqrt{2}\,)u \iff$$

$$\iff (u^2 - v^2) - (3-\sqrt{2}\,)(v+u) = 0 \iff$$

$$\iff (v+u)(u-v-3+\sqrt{2}\,) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} v = -u, \\ v = u - 3 + \sqrt{2}\,. \end{array}\right.$$

Следовательно, система (3) равносильна совокупности двух систем.
Первая система

$$\begin{cases} v = -u, \\ u^2 - (3-\sqrt{2}\,)v = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} v = -u, \\ u^2 + (3-\sqrt{2}\,)u - \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} = 0 \end{cases}$$

имеет два решения:

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ v_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{\sqrt{2}\,(1-3\sqrt{2}\,)}{2}\,,\ v_2 = \frac{\sqrt{2}\,(3\sqrt{2}-1)}{2}\,.$$

Вторая система

$$\begin{cases} v = u - 3 + \sqrt{2}\,, \\ u^2 - (3-\sqrt{2}\,)v = \dfrac{3\sqrt{2}-1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v = u - 3 + \sqrt{2}\,, \\ u^2 - (3-\sqrt{2}\,)u + \dfrac{23-15\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases}$$

решений не имеет, так как содержит квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом

$$D = (\sqrt{2}-3)^2 - 2(23-15\sqrt{2}\,) = 24\sqrt{2} - 35 < 0.$$

Итак, у системы (3) два решения (u_1, v_1) и (u_2, v_2), причем

$$|u_1| < 1, \quad \text{а} \quad |u_2| > 1.$$

Так как

$$|\sin(-2x)| \leqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

то система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin(-2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ \operatorname{tg} 5y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{2}\,k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = -\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi}{5}\,n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left((-1)^{k+1} \cdot \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{2}\,k,\ -\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi}{5}\,n\right)\right\},\ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Решение. Система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 9 - 4\sin^2 y, \\ 2\cos^2 x - 1 = 0. \end{cases}$$

Подстановкой

$$\cos x = u, \quad \sin y = v$$

эту тригонометрическую систему приводим к алгебраической системе

$$\begin{cases} 4v^2 + 4v - 6\sqrt{2}u - 9 = 0, \\ 2u^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4v^2 + 4v - 6\sqrt{2}u - 9 = 0, \\ |u| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ 4v^2 + 4v - 15 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} u = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ 4v^2 + 4v - 3 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \Big(v - \dfrac{3}{2}\Big)\Big(v + \dfrac{5}{2}\Big) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} u = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \Big(v - \dfrac{1}{2}\Big)\Big(v + \dfrac{3}{2}\Big) = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

с решениями

$$u_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ v_1 = -\frac{3}{2}; \quad u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ v_2 = \frac{1}{2};$$

$$u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ v_3 = -\frac{5}{2}; \quad u_4 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ v_4 = \frac{3}{2},$$

причем

$$|v_1| > 1,\ \ |v_3| > 1,\ \ |v_4| > 1, \quad \text{а} \quad |u_2| < 1,\ \ |v_2| < 1.$$

Учитывая подстановку и то, что

$$|\cos\alpha| \leqslant 1, \quad |\sin\alpha| \leqslant 1,\ \forall\alpha \in \mathbb{R},$$

систему (4) приводим к равносильной системе

$$\begin{cases} \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \\ y = (-1)^m \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\Big\{\Big(\pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ (-1)^m \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi m\Big)\Big\},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 3 является еще одним подтверждением того, что не всегда следует сразу использовать возможность исключения переменной из системы (из второго уравнения системы (4) можно найти x, а затем подставить в первое уравнение). Необходимо проверить другие возможности, которые иногда дают более рациональный путь решения.

Так, в задаче 12 предыдущего параграфа были предварительно выполнены преобразования, а в задаче 3 данного параграфа осуществлена замена.

Задача 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} [\sin x] \cdot \{\sin y\} = \sin x, \\ [\sin y] \cdot \{\sin x\} = -\sin y, \end{cases} \tag{5}$$

где $[p]$ — целая часть числа p, $\{p\}$ — дробная часть числа p.

Решение. Сумма

$$[p] + \{p\} = p, \ \forall p \in \mathbb{R}.$$

Поэтому система (5) равносильна системе

$$\begin{cases} [\sin x] \cdot \{\sin y\} = [\sin x] + \{\sin x\}, \\ [\sin y] \cdot \{\sin x\} = -[\sin y] - \{\sin y\}. \end{cases} \tag{6}$$

Полагая, что

$$[\sin x] = m, \ [\sin y] = n, \ \{\sin x\} = a, \ \{\sin y\} = b,$$

тригонометрическую систему (6) приводим к алгебраической системе

$$\begin{cases} mb = m + a, \\ na = -n - b. \end{cases} \tag{7}$$

Поскольку $|\sin \alpha| \leqslant 1, \forall \alpha \in \mathbb{R},$ то

$$0 \leqslant a < 1, \ 0 \leqslant b < 1$$

а целые числа m, n таковы, что

$$|m| \leqslant 1, \ |n| \leqslant 1.$$

В зависимости от m рассмотрим три логические возможности:

$$m = -1;\ \ m = 0;\ \ m = 1.$$

Если $m = -1$, то система (7) имеет вид:

$$\begin{cases} -b = -1 + a, \\ na = -n - b \end{cases} \iff \begin{cases} -b = -1 + a, \\ na = -n - 1 + a \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 - a, \\ (a+1)n = a - 1. \end{cases}$$

Так как $0 \leqslant a < 1$, то $a + 1 \neq 0$, а значит,

$$n = \frac{a-1}{a+1} \iff n = 1 - \frac{2}{a+1}\,.$$

Отсюда

$$\frac{2}{a+1} = t, \quad \text{т.е.} \quad a + 1 = \frac{2}{t}\,,$$

где t — целое ненулевое число.

Поскольку $0 \leqslant a < 1$, то $1 \leqslant a + 1 < 2$, а значит, $1 < t \leqslant 2$, и целое число $t = 2$.

Тогда при $a + 1 = \dfrac{2}{t}$, $b = 1 - a$ имеем

$$a = 0,\ \ b = 1,$$

что невозможно, так как $0 \leqslant b < 1$.

Значит, при $m = -1$ у системы (7) решений нет.

Если $m = 0$, то из первого уравнения системы (7) следует, что

$$a = 0.$$

При этом второе уравнение системы (7) обращается в равенство

$$n + b = 0.$$

Учитывая обозначения, систему (5) приводим к виду

$$\begin{cases} [\sin x] = 0, \\ \{\sin x\} = 0, \\ \sin y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = \pi l,\ \forall l \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

так как равенства $[p] = \{p\} = 0$ равносильны тому, что $p = 0$.

При $m = 1$ первое уравнение системы (7) приводим к равенству

$$b = a + 1,$$

которое невозможно при условии, что $0 \leqslant a < 1$, $0 \leqslant b < 1$.

Ответ: $\{(\pi k, \pi l)\}$, $\forall k, l \in \mathbb{Z}$.

Иногда подстановка не столь очевидна, как об этом можно судить по рассмотренным задачам. Требуется предварительно выполнить ряд преобразований, прежде чем увидеть нужную подстановку.

Задача 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x(\cos y + \cos z) = 2, \\ x(\cos 2y + \cos 2z) = -2, \\ x(\cos 3y + \cos 3z) = -4. \end{cases} \tag{8}$$

Решение. Используя формулы

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1, \quad \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

систему (8) приводим к равносильной системе

$$\begin{cases} x(\cos y + \cos z) = 2, \\ x(\cos^2 y + \cos^2 z) = x - 1, \\ 4x(\cos^3 y + \cos^3 z) - 3x(\cos y + \cos z) = -4 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x(\cos y + \cos z) = 2, \\ x(\cos^2 y + \cos^2 z) = x - 1, \\ 2x(\cos^3 y + \cos^3 z) = 1. \end{cases}$$

Приняв обозначения

$$\cos y = a, \ \cos z = b,$$

переходим к алгебраической системе

$$\begin{cases} x(a + b) = 2, \\ x(a^2 + b^2) = x - 1, \\ 2x(a^3 + b^3) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(a + b) = 2, \\ x(a + b)^2 - 2abx = x - 1, \\ 2x(a + b)\big((a + b)^2 - 3ab\big) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a+b=\dfrac{2}{x}, \\ ab=\dfrac{4+x-x^2}{2x^2}, \\ 4\big((a+b)^2-3ab\big)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=\dfrac{2}{x}, \\ ab=\dfrac{4+x-x^2}{2x^2}, \\ 5x^2-6x-8=0. \end{cases}$$

У квадратного уравнения

$$5x^2-6x-8=0$$

два корня: $x=-0{,}8$ и $x=2$.

Если $x=-0{,}8$, то $a+b=-2{,}5$; если учесть подстановку, то

$$\cos y+\cos z=-2{,}5,$$

что невозможно, так как $|\cos\alpha|\leqslant 1,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

При $x=2$ получаем, что

$$a+b=1, \quad ab=0{,}25.$$

По обратной теореме Виета a и b — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2-\lambda+0{,}25=0 \iff (\lambda-0{,}5)^2=0 \iff \lambda=0{,}5.$$

Значит, $a=b=0{,}5$.

Учитывая подстановку, получаем:

$$\cos y=0{,}5 \iff y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z};$$

$$\cos z=0{,}5 \iff z=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ \forall m\in\mathbb{Z}.$$

Следовательно, множество решений системы (8) состоит из упорядоченных троек:

$$\Big(2,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi m\Big),\ \Big(2,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{3}+2\pi m\Big),$$

$$\Big(2,\ \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi m\Big),\ \Big(2,\ \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{\pi}{3}+2\pi m\Big),\ \forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\Big\{\Big(2,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi m\Big),\ \Big(2,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, \dfrac{\pi}{3}+2\pi m\Big),$

$$\left(2,\ \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi m\right),\ \left(2,\ \frac{\pi}{3}+2\pi n, \frac{\pi}{3}+2\pi m\right)\Big\},\ \forall m,n\in\mathbb{Z}.$$

Задача 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin y-\cos y, \\ 2\sin 2x=\dfrac{3}{2}+\sin 2y. \end{cases} \tag{9}$$

Решение. Поскольку при любых действительных x и y

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x,$$

$$(\sin y-\cos y)^2=\sin^2 y+\cos^2 y-2\sin y\cos y=1-\sin 2y,$$

то

$$2\sin 2x=2(\sin x+\cos x)^2-2,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

$$\sin 2y=1-(\sin y-\cos y)^2,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, система (9) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin y-\cos y, \\ 2(\sin x+\cos x)^2=\dfrac{9}{2}-(\sin y-\cos y)^2. \end{cases}$$

Подстановкой

$$\sin x+\cos x=u,\ \ \sin y-\cos y=v$$

эту тригонометрическую систему приводим к алгебраической системе

$$\begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+v, \\ 2u^2=\dfrac{9}{2}-v^2 \end{cases} \iff \begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+v, \\ 6v^2+4\sqrt{2}\,v-7=0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение

$$6v^2 + 4\sqrt{2}\,v - 7 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &v = -\frac{7\sqrt{2}}{6}\,, \\ &v = \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}\right.$$

Следовательно, решениями алгебраической системы будут

$$u_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\,,\ v_1 = -\frac{7\sqrt{2}}{6} \quad \text{и} \quad u_2 = \sqrt{2}\,,\ v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Таким образом, система (9) равносильна совокупности двух тригонометрических систем.

Первая система

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,, \\ \sin y - \cos y = -\dfrac{7\sqrt{2}}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x + \sin\Bigl(\dfrac{\pi}{2} - x\Bigr) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,, \\ \sin y - \sin\Bigl(\dfrac{\pi}{2} - y\Bigr) = -\dfrac{7\sqrt{2}}{6} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi}{4}\,\cos\Bigl(x - \dfrac{\pi}{4}\Bigr) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\,, \\ 2\cos\dfrac{\pi}{4}\,\sin\Bigl(y - \dfrac{\pi}{4}\Bigr) = -\dfrac{7\sqrt{2}}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\Bigl(x - \dfrac{\pi}{4}\Bigr) = -\dfrac{2}{3}\,, \\ \sin\Bigl(y - \dfrac{\pi}{4}\Bigr) = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

не имеет решений, так как

$$\left|\sin\Bigl(y - \frac{\pi}{4}\Bigr)\right| \leqslant 1,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Вторая система

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}\,, \\ \sin y - \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x + \sin\Bigl(\dfrac{\pi}{2} - x\Bigr) = \sqrt{2}\,, \\ \sin y - \sin\Bigl(\dfrac{\pi}{2} - y\Bigr) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{\pi}{4}\,\cos\Bigl(x-\dfrac{\pi}{4}\Bigr)=\sqrt{2}\,, \\[2ex] 2\cos\dfrac{\pi}{4}\,\sin\Bigl(y-\dfrac{\pi}{4}\Bigr)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\Bigl(x-\dfrac{\pi}{4}\Bigr)=1, \\[2ex] \sin\Bigl(y-\dfrac{\pi}{4}\Bigr)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}, \\[2ex] y=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\Bigl\{\Bigl(\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, \dfrac{\pi}{4}+(-1)^k\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi k\Bigr)\Bigr\},\ \forall k,n\in\mathbb{Z}.$

Задача 7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \arcsin x\cdot\arcsin y=\dfrac{\pi^2}{12}\,, \\[2ex] \arccos x\cdot\arccos y=\dfrac{\pi^2}{24}\,. \end{cases} \tag{10}$$

Решение. Используя формулу

$$\arcsin t+\arccos t=\frac{\pi}{2}\,,\ \forall t\in[-1;1],$$

систему (10) заменяем равносильной системой

$$\begin{cases} \arcsin x\cdot\arcsin y=\dfrac{\pi^2}{12}\,, \\[2ex] \Bigl(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x\Bigr)\Bigl(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin y\Bigr)=\dfrac{\pi^2}{24}\,. \end{cases}$$

Подстановкой

$$\arcsin x=u,\ \ \arcsin y=v$$

эту обратную тригонометрическую систему приводим к алгебраической системе

$$\begin{cases} uv = \dfrac{\pi^2}{12}\,, \\ \left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right) = \dfrac{\pi^2}{24} \end{cases} \iff \begin{cases} uv = \dfrac{\pi^2}{12}\,, \\ u + v = \dfrac{7\pi}{12}\,. \end{cases}$$

Систему решим, следуя обратной теореме Виета.

Составим вспомогательное приведенное квадратное уравнение

$$\lambda^2 - \frac{7\pi}{12}\,\lambda + \frac{\pi^2}{12} = 0,$$

корнями которого являются числа $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{\pi}{4}$.

Тогда корнями алгебраической системы будут

$$u_1 = \frac{\pi}{3}\,,\ v_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{\pi}{4}\,,\ v_2 = \frac{\pi}{3}\,.$$

Значит, система (10) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \arcsin x = \dfrac{\pi}{3}\,, \\ \arcsin y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arcsin x = \dfrac{\pi}{4}\,, \\ \arcsin y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

Задача 8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = 1 : 2 : 3, \\ x + y + z = \pi. \end{cases} \tag{11}$$

Решение. Поскольку

$$\operatorname{tg}(x+y+z) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x},$$

а при $x + y + z = \pi$ значение $\operatorname{tg}(x + y + z) = 0$, то для системы (11) справедливо тождество

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \tag{12}$$

(считаем, что x, y, z не равны $\dfrac{\pi}{2} + \pi l$, $\forall l \in \mathbb{Z}$).

Обозначим через t коэффициент пропорциональности для первых двух уравнений системы (11). Тогда

$$\operatorname{tg} x = t, \;\; \operatorname{tg} y = 2t, \;\; \operatorname{tg} z = 3t.$$

В соответствии с тождеством (12) получаем, что

$$t + 2t + 3t = t \cdot 2t \cdot 3t \iff 6t = 6t^3 \iff t(t^2 - 1) = 0,$$

т.е. $t = 0$, $t = \pm 1$.

Если $t = 0$, то

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z = 0,$$

и

$$x = \pi k, \; y = \pi m, z = \pi n, \tag{13}$$

где k, m, n — целые числа.

Подставив во второе уравнение системы (11) значения (13), устанавливаем, что целые числа k, m, n связаны равенством

$$n = 1 - k - m.$$

Решениями системы (11) будут упорядоченные тройки

$$(\pi k, \; \pi m, \; \pi(1 - k - m)), \; \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

Если $t = 1$, то

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} y = 2, \\ \operatorname{tg} z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \; \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = \operatorname{arctg} 2 + \pi m, \; \forall m \in \mathbb{Z}, \\ z = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \; \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{14}$$

Подставив значения (14) во второе уравнение системы (11), с учетом того, что сумма арктангенсов (см. задачу 11 из параграфа 1)

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \frac{3\pi}{4},$$

устанавливаем, что

$$n = -(k+m).$$

Решениями системы (11) будут упорядоченные тройки

$$\Big(\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ \operatorname{arctg} 3 - \pi(k+m)\Big),\ \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

Если $t = -1$, то

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} y = -2, \\ \operatorname{tg} z = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = -\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z}, \\ z = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{15}$$

Подставив значения (15) во второе уравнение системы (11), находим, что

$$n = 2 - k - m.$$

Решениями системы (11) будут упорядоченные тройки

$$\Big(-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ -\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ -\operatorname{arctg} 3 + \pi(2-k-m)\Big),\ \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:

$$\Big\{(\pi k, \pi m, \pi(1-k-m)), \Big(\frac{\pi}{4} + \pi k, \operatorname{arctg} 2 + \pi m, \operatorname{arctg} 3 - \pi(k+m)\Big),$$

$$\Big(-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ -\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ -\operatorname{arctg} 3 + \pi(2-k-m)\Big)\Big\},\ \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

Задача 9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x : \sin y : \sin z = 2 : 3 : 4, \\ x + y + z = \pi. \end{cases} \tag{16}$$

Решение. Если

$$x + y + z = \pi, \tag{17}$$

то

$$\sin x = \sin\bigl(\pi - (y + z)\bigr) = \sin(y + z),$$

$$\sin y = \sin\bigl(\pi - (x + z)\bigr) = \sin(x + z),$$

$$\sin z = \sin\bigl(\pi - (x + y)\bigr) = \sin(x + y).$$

Используя формулу синуса суммы, получаем, что для системы (16) справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} \sin y \cos z + \cos y \sin z = \sin x, \\ \sin x \cos z + \cos x \sin z = \sin y, \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin z. \end{cases}$$

Обозначим через t коэффициент пропорциональности для первых двух уравнений системы (16). Тогда

$$\sin x = 2t, \;\; \sin y = 3t, \;\; \sin z = 4t. \tag{18}$$

Следовательно, система (16) равносильна системе

$$\begin{cases} 3t \cos z + 4t \cos y = 2t, \\ 2t \cos z + 4t \cos x = 3t, \\ 2t \cos y + 3t \cos x = 4t, \\ x + y + z = \pi \end{cases} \tag{19}$$

при условии (18).

Если $t = 0$, то

$$\sin x = \sin y = \sin z = 0,$$

и

$$x = \pi k, \;\; y = \pi m, \;\; z = \pi n, \tag{20}$$

где k, m, n — целые числа.

Подставив значения (20) в уравнение (17), получим, что

$$n = 1 - k - m.$$

Решениями системы (16) будут упорядоченные тройки чисел

$$\big(\pi k,\ \pi m,\ \pi(1-k-m)\big),\ \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $t \neq 0$. Разделим на коэффициент пропорциональности t первые три уравнения системы (19) и получим систему трех линейных уравнений относительно $\cos x$, $\cos y$ и $\cos z$:

$$\begin{cases} 3\cos z + 4\cos y = 2, \\ 2\cos z + 4\cos x = 3, \\ 2\cos y + 3\cos x = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = \dfrac{7}{8}, \\ \cos y = \dfrac{11}{16}, \\ \cos z = -\dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

решениями которой являются упорядоченные тройки чисел

$$\Big(\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k,\ \arccos\frac{11}{16} + 2\pi m,\ \pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n\Big), \tag{21}$$

$$\Big(\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k,\ \arccos\frac{11}{16} + 2\pi m,\ \arccos\frac{1}{4} - \pi + 2\pi n\Big), \tag{22}$$

$$\Big(\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k,\ -\arccos\frac{11}{16} + 2\pi m,\ \pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n\Big), \tag{23}$$

$$\Big(\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k,\ -\arccos\frac{11}{16} + 2\pi m,\ \arccos\frac{1}{4} - \pi + 2\pi n\Big), \tag{24}$$

$$\Big(-\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k,\ \arccos\frac{11}{16} + 2\pi m,\ \pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n\Big), \tag{25}$$

$$\Big(-\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k,\ \arccos\frac{11}{16} + 2\pi m,\ \arccos\frac{1}{4} - \pi + 2\pi n\Big), \tag{26}$$

$$\Big(-\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k,\ -\arccos\frac{11}{16} + 2\pi m,\ \pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n\Big), \tag{27}$$

$$\Big(-\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k,\ -\arccos\frac{11}{16} + 2\pi m,\ \arccos\frac{1}{4} - \pi + 2\pi n\Big), \tag{28}$$

где k, m, n — целые числа.

Пусть
$$A = \arccos\frac{7}{8} + \arccos\frac{11}{16}\,.$$
Тогда
$$\cos A = \cos\Bigl(\arccos\frac{7}{8} + \arccos\frac{11}{16}\Bigr) =$$
$$= \cos\arccos\frac{7}{8}\,\cos\arccos\frac{11}{16} - \sin\arccos\frac{7}{8}\,\sin\arccos\frac{11}{16} =$$
$$= \frac{7}{8}\cdot\frac{11}{16} - \sqrt{1-\frac{49}{64}}\cdot\sqrt{1-\frac{121}{256}} = \frac{77-\sqrt{15}\cdot\sqrt{135}}{8\cdot 16} = \frac{77-45}{8\cdot 16} = \frac{1}{4}\,.$$

Найдем A по заданному значению косинуса этого аргумента.

Для того чтобы задача разрешалась однозначно, нужно указать пределы изменения A.

Так как
$$0 < \arccos\frac{7}{8} < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad 0 < \arccos\frac{11}{16} < \frac{\pi}{2}\,,$$
то сумма арккосинусов
$$0 < \arccos\frac{7}{8} + \arccos\frac{11}{16} < \pi.$$

Следовательно,
$$\cos A = \frac{1}{4} \implies A = \arccos\frac{1}{4}\,.$$

Итак,
$$\arccos\frac{7}{8} + \arccos\frac{11}{16} = \arccos\frac{1}{4}\,. \tag{29}$$

Только те упорядоченные тройки (x, y, z) из $(21)-(28)$ будут решениями системы (16), в которых числа x, y, z удовлетворяют уравнению (17). С учетом равенства (29) в каждом из случаев $(21)-(28)$ устанавливаем следующее.

С л у ч а й (21):

$$\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k + \arccos\frac{11}{16} + 2\pi m + \pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n = \pi \iff$$

$$\iff \arccos\frac{1}{4} - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi(k+m+n) = 0 \iff n = -(k+m).$$

Среди упорядоченных троек (21) решениями системы (16) будут

$$\Big(\arccos\frac{7}{8}+2\pi k,\ \arccos\frac{11}{16}+2\pi m,\ \pi-\arccos\frac{1}{4}-2\pi(k+m)\Big),\ \forall k, m\in\mathbb{Z}.$$

С л у ч а й (22):

$$\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k + \arccos\frac{11}{16} + 2\pi m + \arccos\frac{1}{4} - \pi + 2\pi n = \pi \iff$$

$$\iff \arccos\frac{1}{4} + \arccos\frac{1}{4} + 2\pi(k+m+n-1) = 0 \iff$$

$$\iff \arccos\frac{1}{4} = \pi(1-k-m-n).$$

Это равенство не выполняется, так как из равенства $\arccos\dfrac{1}{4} = \pi p$ следует, что $\cos\pi p = \dfrac{1}{4}$, но это не верно, ибо $\cos\pi p = (-1)^p,\ \forall p\in\mathbb{Z}$.

Итак, среди упорядоченных троек (22) решений системы (16) нет.

С л у ч а й (23):

$$\arccos\frac{7}{8} + 2\pi k - \arccos\frac{11}{16} + 2\pi m + \pi - \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n = \pi \iff$$

$$\iff \Big(\arccos\frac{7}{8} - \arccos\frac{1}{4}\Big) - \arccos\frac{11}{16} + 2\pi(k+m+n) = 0 \iff$$

$$\iff \arccos\frac{11}{16} = \pi(k+m+n).$$

Это равенство не выполняется, так как из равенства $\arccos\dfrac{11}{16} = \pi l$

следует, что $\cos \pi l = \dfrac{11}{16}$, но это не верно, ибо $\cos \pi l = (-1)^l$, $\forall l \in \mathbb{Z}$.

Итак, среди упорядоченных троек (23) решений системы (16) нет.

С л у ч а й (24):

$$\arccos \frac{7}{8} + 2\pi k - \arccos \frac{11}{16} + 2\pi m + \arccos \frac{1}{4} - \pi + 2\pi n = \pi \iff$$

$$\iff \arccos \frac{7}{8} + \left(\arccos \frac{1}{4} - \arccos \frac{11}{16}\right) = 2\pi(1 - k - m - n) \iff$$

$$\iff \arccos \frac{7}{8} = \pi(1 - k - m - n).$$

Это равенство не выполняется, так как из равенства $\arccos \dfrac{7}{8} = \pi q$ следует, что $\cos \pi q = \dfrac{7}{8}$, но это не верно, ибо $\cos \pi q = (-1)^q$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Итак, среди упорядоченных троек (24) решений системы (16) нет.

С л у ч а й (25):

$$-\arccos \frac{7}{8} + 2\pi k + \arccos \frac{11}{16} + 2\pi m + \pi - \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n = \pi \iff$$

$$\iff -\arccos \frac{7}{8} + \left(\arccos \frac{11}{16} - \arccos \frac{1}{4}\right) = -2\pi(k + m + n) \iff$$

$$\iff \arccos \frac{7}{8} = \pi(k + m + n).$$

Как и в случае (24), это равенство не выполняется.

Итак, среди упорядоченных троек (25) решений системы (16) нет.

С л у ч а й (26):

$$-\arccos \frac{7}{8} + 2\pi k + \arccos \frac{11}{16} + 2\pi m + \arccos \frac{1}{4} - \pi + 2\pi n = \pi \iff$$

$$\iff \left(\arccos \frac{1}{4} - \arccos \frac{7}{8}\right) + \arccos \frac{11}{16} = 2\pi(1 - k - m - n) \iff$$

$$\iff \arccos \frac{11}{16} = \pi(1 - k - m - n).$$

Как и в случае (23), это равенство не выполняется.

Итак, среди упорядоченных троек (26) решений системы (16) нет.

Случай (27):

$$-\arccos\frac{7}{8}+2\pi k-\arccos\frac{11}{16}+2\pi m+\pi-\arccos\frac{1}{4}+2\pi n=\pi \iff$$

$$\iff -\Big(\arccos\frac{7}{8}+\arccos\frac{11}{16}\Big)-\arccos\frac{1}{4}= -2\pi(k+m+n) \iff$$

$$\iff \arccos\frac{1}{4}=\pi(k+m+n).$$

Как и в случае (21), это равенство не выполняется.

Итак, среди упорядоченных троек (27) решений системы (16) нет.

Случай (28):

$$-\arccos\frac{7}{8}+2\pi k-\arccos\frac{11}{16}+2\pi m+\arccos\frac{1}{4}-\pi+2\pi n=\pi \iff$$

$$\iff -\Big(\arccos\frac{7}{8}+\arccos\frac{11}{16}\Big)+\arccos\frac{1}{4}=2\pi(1-k-m-n) \iff$$

$$\iff n=1-k-m.$$

Среди упорядоченных троек (28) решениями системы (16) будут

$$\Big(-\arccos\frac{7}{8}+2\pi k,\ -\arccos\frac{11}{16}+2\pi m,\ \arccos\frac{1}{4}+\pi-2\pi(k+m)\Big),$$

где k и m — любые целые числа.

Ответ: $\Big\{\Big(\arccos\frac{7}{8}+2\pi k,\ \arccos\frac{11}{16}+2\pi m,\ \pi-\arccos\frac{1}{4}-2\pi(k+m)\Big),$

$$\Big(-\arccos\frac{7}{8}+2\pi k,\ -\arccos\frac{11}{16}+2\pi m,\ \arccos\frac{1}{4}+\pi-2\pi(k+m)\Big),$$

$$\big(\pi k,\ \pi m,\ \pi(1-k-m)\big)\Big\},\ \forall k,m\in\mathbb{Z}.$$

К тригонометрическим системам могут быть приведены и алгебраические системы, что встречается редко, но может дать эффективный способ решения.

Задача 10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y, \\ 2y + y^2z = z, \\ 2z + z^2x = x. \end{cases} \tag{30}$$

Решение. Поскольку при $|x| = 1$ из первого уравнения системы (30) получаем, что

$$\pm\, 2 + y = y;$$

при $|y| = 1$ из второго уравнения системы (30) получаем, что

$$\pm\, 2 + z = z;$$

при $|z| = 1$ из третьего уравнения системы (30) получаем, что

$$\pm\, 2 + x = x,$$

то система (30) не имеет решений, у которых

$$|x| = 1, \;\; |y| = 1, \;\; |z| = 1.$$

Значит, система (30) равносильна системе

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2}\,, \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2}\,, \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2}\,. \end{cases}$$

Используя формулу тангенса двойного аргумента

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u}\,,$$

которая имеет смысл при $u \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\, n,\; u \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\; \forall n \in \mathbb{Z},$ и положив

$$x = \operatorname{tg} u,$$

получим тригонометрическую систему

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} 2u, \\ z = \operatorname{tg} 4u, \\ x = \operatorname{tg} 8u, \\ x = \operatorname{tg} u \end{cases} \iff \begin{cases} \operatorname{tg} 8u - \operatorname{tg} u = 0, \\ x = \operatorname{tg} u, \\ y = \operatorname{tg} 2u, \\ z = \operatorname{tg} 4u. \end{cases}$$

Тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg} 8u - \operatorname{tg} u = 0 \iff \frac{\sin 7u}{\cos 8u \cos u} = 0 \iff \sin 7u = 0 \iff$$

$$\iff u = \frac{\pi n}{7}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$x = \operatorname{tg} \frac{\pi n}{7}, \ \ y = \operatorname{tg} \frac{2\pi n}{7}, \ \ z = \operatorname{tg} \frac{4\pi n}{7}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \left(\operatorname{tg} \frac{\pi n}{7}, \operatorname{tg} \frac{2\pi n}{7}, \operatorname{tg} \frac{4\pi n}{7} \right) \right\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$

§ 3. Тригонометрические системы специальных видов

1. Системы, в которых одно уравнение алгебраическое, а другое содержит тригонометрические функции

Задача 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. С учетом второго уравнения системы (1) преобразуем первое уравнение этой системы:

$$\cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \iff 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{2} \iff \cos\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x - y = \dfrac{4\pi}{3} + 4\pi k, \\ x - y = \dfrac{8\pi}{3} + 4\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Тригонометрическая система (1) равносильна совокупности двух алгебраических систем:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{4\pi}{3} + 4\pi k, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ y = -\dfrac{\pi}{3} - 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{8\pi}{3} + 4\pi k, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k, \\ y = -\pi - 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\pi+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}-2\pi k\right), \left(\dfrac{5\pi}{3}+2\pi k,\ -\pi-2\pi k,\right)\right\}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Аналогичным методом могут быть решены системы

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a,\\ x\pm y = b\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a,\\ x\pm y = b,\end{cases} \tag{2}$$

где знаки берутся в любом сочетании.

Задача 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sin x - \sin y = \dfrac{1}{2}\,,\\[2mm] x - y = \dfrac{\pi}{6}\,.\end{cases} \tag{3}$$

Решение. Если $x-y=\dfrac{\pi}{6}$, то

$$\sin x - \sin y = \frac{1}{2} \iff 2\sin\frac{x-y}{2}\,\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \implies$$

$$\implies 2\sin\frac{\pi}{12}\,\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Вычислим

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\,\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\,\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\,.$$

Тогда из первого уравнения системы (1) с учетом выполненных преобразований получаем:

$$2\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \iff \cos\frac{x+y}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \iff$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \iff \frac{x+y}{2} = \pm\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow$$

$$\iff x+y = \pm 2\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + 4\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Вычислим

$$\arccos\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \arccos\Bigl(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Bigr) =$$

$$= \arccos\Bigl(\cos\frac{\pi}{6}\ \cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\ \sin\frac{\pi}{4}\Bigr) =$$

$$= \arccos\cos\Bigl(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\Bigr) = \arccos\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}\,.$$

Тригонометрическая система (3) равносильна совокупности двух алгебраических систем:

$$\begin{cases} x+y = -\dfrac{\pi}{6}+4\pi k, \\ x-y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi k, \\ y = -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{6}+4\pi k, \\ x-y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6}+2\pi k, \\ y = 2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\Bigl\{\Bigl(2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi k\Bigr), \Bigl(\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, 2\pi k\Bigr)\Bigr\}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Системы вида (знаки берутся в любом сочетании)

$$\begin{cases} \sin x \pm \cos y = a, \\ x \pm y = b \end{cases} \qquad (4)$$

сводятся к системам (2), если использовать формулы приведения, например:

$$\sin x = \cos\Bigl(\frac{\pi}{2}-x\Bigr) \quad \text{или} \quad \cos x = \sin\Bigl(\frac{\pi}{2}\pm x\Bigr) \quad \text{и др.}$$

Задача 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}\,. \end{cases} \tag{5}$$

Решение. Система (5) такова, что ее первое уравнение

$$\sin x + \cos y = 1 \iff \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 1 \iff$$

$$\iff 2\sin\left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Учитывая, что $x + y = \dfrac{\pi}{3}$, получаем:

$$2\cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2}} = 2\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\,.$$

Тогда система (5) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{x-y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin\left(\dfrac{x-y}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{2} + (-1)^n \cdot 2\arcsin\sqrt{2-\sqrt{3}} + 2\pi n, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{12} + (-1)^n \cdot \arcsin\sqrt{2-\sqrt{3}} + \pi n, \\ y = \dfrac{5\pi}{12} + (-1)^{n+1} \cdot \arcsin\sqrt{2-\sqrt{3}} - \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Преобразовав сложный корень

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2},$$

получаем, что множество упорядоченных пар (A, B), где

$$A = -\frac{\pi}{12} + (-1)^n \cdot \arcsin\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2} + \pi n,$$

$$B = \frac{5\pi}{12} + (-1)^{n+1} \cdot \arcsin\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2} - \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

является множеством решений системы (5).

Ответ: $\{(A, B)\}$, $A = -\dfrac{\pi}{12} + (-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2} + \pi n,$

$$B = \frac{5\pi}{12} + (-1)^{n+1} \cdot \arcsin\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2} - \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5(\sin 2x + \sin 2y) = 2\big(1 + \cos^2(x-y)\big), \\ x + y = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases} \tag{6}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы (6) с учетом ее второго уравнения:

$$10\sin(x+y)\cos(x-y) = 2 + 2\cos^2(x-y) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 10\sin\frac{\pi}{6}\cos(x-y) = 2 + 2\cos^2(x-y) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ 2\cos^2(x-y)-5\cos(x-y)+2=0\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ \big(2\cos(x-y)-1\big)\big(\cos(x-y)-2\big)=0\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ \cos(x-y)=\frac{1}{2}\ \Longleftrightarrow\ x-y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$$

так как $|\cos(x-y)|\leqslant 1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Система (6) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-y=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x+y=\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{12}+\pi k,\\ y=\dfrac{\pi}{4}-\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\\ x+y=\dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\\ y=-\dfrac{\pi}{12}-\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(-\dfrac{\pi}{12}+\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}-\pi k\right), \left(\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{12}-\pi k\right)\right\},\ \forall k\in\mathbb{Z}$.

Системы видов (2) и (4) (например, системы (1), (3) и (5)) могут быть решены методом исключения переменной, который бывает предпочтительнее предложенного в предыдущих задачах. Такова, например, задача 5.

Задача 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=1,\\ x+y=180^\circ. \end{cases} \tag{7}$$

Решение. Из второго уравнения системы (7) найдем

$$y=180^\circ-x$$

и подставим в первое уравнение этой системы:

$$\sin x+\sin(180^\circ-x)=1\ \Longleftrightarrow\ \sin x+\sin x=1\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ \sin x=0{,}5\ \Longleftrightarrow\ x=(-1)^k\cdot 30^\circ+180^\circ\cdot k,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Если $x = 30° + 360° \cdot m, \forall m \in \mathbb{Z},$ то

$$y = 150° - 360° \cdot m, \ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Если $x = 150° + 360° \cdot m, \forall m \in \mathbb{Z},$ то

$$y = 30° - 360° \cdot m, \ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{(30° \cdot (1 + 12m), 30° \cdot (5 - 12m)),$
$(30° \cdot (5 + 12m), 30° \cdot (1 - 12m))\}, \ \forall m \in \mathbb{Z}.$

Системы (знаки берутся в любом сочетании)

$$\begin{cases} \sin^2 x \pm \sin^2 y = a, \\ x \pm y = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos^2 x \pm \cos^2 y = a, \\ x \pm y = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin^2 x \pm \cos^2 y = a, \\ x \pm y = b \end{cases} \tag{8}$$

решаются с использованием тригонометрических формул

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \text{ и } \ \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Задача 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ x - y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases} \tag{9}$$

Решение. Тригонометрическое уравнение

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \frac{3}{4} \iff 1 - \cos 2x - (1 - \cos 2y) = \frac{3}{2} \iff$$

$$\iff \cos 2y - \cos 2x = \frac{3}{2} \iff 2 \sin(x + y) \sin(x - y) = \frac{3}{2}.$$

Тогда система (9) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin(x+y)\sin(x-y) = \dfrac{3}{4}\,, \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x+y)\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{4}\,, \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{3} + \pi n, \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}\,n, \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}\,n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{6} + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}\,n,\ -\dfrac{\pi}{6} + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{2}\,n\right)\right\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Задача 7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{x}{4} + \cos^2\dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}\,, \\ x + y = 600^\circ. \end{cases} \tag{10}$$

Решение[1]. Тригонометрическое уравнение

$$\cos^2\frac{x}{4} + \cos^2\frac{y}{4} = \frac{1}{4} \iff 1 + \cos\frac{x}{2} + 1 + \cos\frac{y}{2} = \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{y}{2} = -\frac{3}{2} \iff 2\cos\frac{x+y}{4}\cos\frac{x-y}{4} = -\frac{3}{2}\,.$$

Тогда система (10) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{4}\cos\dfrac{x-y}{4} = -\dfrac{3}{4}\,, \\ x + y = 600^\circ \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 150^\circ \cos\dfrac{x-y}{4} = -\dfrac{3}{4}\,, \\ x + y = 600^\circ \end{cases} \iff$$

[1] Предварительно можно выполнить замену $x = 4u$, $y = 4v$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ x+y = 600^\circ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-y = \pm 120^\circ + 1440^\circ \cdot k, \\ x+y = 600^\circ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y = -120^\circ + 1440^\circ \cdot k, \\ x+y = 600^\circ, \end{cases} \\ \begin{cases} x-y = 120^\circ + 1440^\circ \cdot k, \\ x+y = 600^\circ \end{cases} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 240^\circ + 720^\circ \cdot k, \\ y = 360^\circ - 720^\circ \cdot k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 360^\circ + 720^\circ \cdot k, \\ y = 240^\circ - 720^\circ \cdot k, \end{cases} \end{array} \right.$$

где k — любое целое число.

Ответ:

$\bigl\{\bigl(240^\circ\cdot(1+3k), 360^\circ\cdot(1-2k)\bigr),\ \bigl(360^\circ\cdot(1+2k), 240^\circ\cdot(1-3k)\bigr)\bigr\},\ \forall k \in \mathbb{Z}.$

Задача 8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 2x - \sin^2 3y = \dfrac{1}{4}, \\ 2x - 3y = -\dfrac{\pi}{3}. \end{cases} \tag{11}$$

Решение[1]. Система (11) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{1+\cos 4x}{2} - \dfrac{1-\cos 6y}{2} = \dfrac{1}{4}, \\ 2x - 3y = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos 4x + \cos 6y = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - 3y = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\cos\dfrac{4x+6y}{2}\cos\dfrac{4x-6y}{2} = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - 3y = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

[1] Предварительно можно выполнить подстановку $2x = u$, $3y = v$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\cos(2x+3y)\cos\Big(-\dfrac{\pi}{3}\Big) = \dfrac{1}{2}, \\ 2x-3y = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(2x+3y) = \dfrac{1}{2}, \\ 2x-3y = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ 2x-3y = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+3y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ 2x-3y = -\dfrac{\pi}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3y = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ 2x-3y = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{2}, \\ y = \dfrac{\pi(3k+1)}{9}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi(3k-1)}{6}, \\ y = \dfrac{\pi k}{3}, \ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\Big(\dfrac{\pi k}{2}, \dfrac{\pi(3k+1)}{9}\Big), \Big(\dfrac{\pi(3k-1)}{6}, \dfrac{\pi k}{3}\Big)\right\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Следующий класс образуют системы, у которых одно уравнение содержит произведение тригонометрических функций, а другое — сумму или разность их аргументов:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ x \pm y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ x \pm y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ x \pm y = b; \end{cases} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a, \\ x \pm y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = a, \\ x \pm y = b; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = a, \\ x \pm y = b. \end{cases} \qquad (13)$$

Задача 9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos \pi x \cos \pi y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ y - x = \dfrac{1}{4}\,. \end{cases} \tag{14}$$

Решение[1]. Тригонометрическое уравнение

$$\cos \pi x \cos \pi y = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos \pi(x-y) + \cos \pi(x+y) = \sqrt{2}\,.$$

При $y - x = \dfrac{1}{4}$ значение

$$\cos \pi(x-y) = \cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Тогда система (14) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos \pi(x+y) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ y - x = \dfrac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \pi(x+y) = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ y - x = \dfrac{1}{4} \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y + x = \dfrac{1}{4} + 2n, \\ y - x = \dfrac{1}{4}\,, \end{cases} \\ \begin{cases} y + x = -\dfrac{1}{4} + 2n, \\ y - x = \dfrac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = n, \\ y = \dfrac{1}{4} + n, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} + n, \\ y = n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\Big\{\Big(n, \dfrac{1}{4} + n\Big), \Big(-\dfrac{1}{4} + n, n\Big)\Big\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

---

[1] Полагая, что $\pi x = u$, $\pi y = v$, получим систему вида (12).

Задача 10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{\sqrt{6}}{4}\,, \\ x - y = \dfrac{\pi}{12}\,. \end{cases} \tag{15}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы (15) с учетом второго уравнения этой системы:

$$\sin x \cos y = \frac{\sqrt{6}}{4} \iff \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big) = \frac{\sqrt{6}}{4} \implies$$

$$\implies \sin\frac{\pi}{12} + \sin(x+y) = \frac{\sqrt{6}}{2}\,.$$

Поскольку

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\,,$$

то

$$\sin(x+y) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \iff$$

$$\iff x + y = (-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Вычислим

$$\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}-\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\,,$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\,\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\,\sin\frac{\pi}{4}\right)=\arcsin\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\arcsin\sin\frac{7\pi}{12}=\arcsin\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)=\arcsin\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}\,.$$

Тогда

$$x+y=(-1)^k\cdot\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$$

а система (15) равносильна алгебраической системе

$$\begin{cases} x+y=(-1)^k\cdot\dfrac{5\pi}{12}+\pi k,\\[2mm] x-y=\dfrac{\pi}{12}\,,\ \forall k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Полагая, что

$$k=2s\quad\text{и}\quad k=2s+1,\ s\in\mathbb{Z},$$

получаем, что система (15) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{5\pi}{12}+2\pi s,\\[2mm] x-y=\dfrac{\pi}{12}\end{cases}\iff\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi s,\\[2mm] y=\dfrac{\pi}{6}+\pi s,\ \forall s\in\mathbb{Z};\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{7\pi}{12}+2\pi s,\\[2mm] x-y=\dfrac{\pi}{12}\end{cases}\iff\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+\pi s,\\[2mm] y=\dfrac{\pi}{4}+\pi s,\ \forall s\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi s,\ \dfrac{\pi}{6}+\pi s\right),\left(\dfrac{\pi}{3}+\pi s,\ \dfrac{\pi}{4}+\pi s\right)\right\},\ \forall s\in\mathbb{Z}.$

Задача 11. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 1, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}\,. \end{cases} \tag{16}$$

Решение[1]. Учитывая второе уравнение системы (16), преобразуем первое уравнение этой системы:

$$\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 1 \iff \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1 \Longrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\Big(x - \frac{\pi}{6}\Big) = 1 \iff$$

$$\iff \operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}} = 1 \iff \operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = 1 \iff$$

$$\iff \frac{\sqrt{3}\,\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}} = 1 \iff \frac{\sqrt{3}\,\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{\Big(\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)\big(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\,\big)}{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}} = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,, \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3}\,, \end{array}\right.$$

т.е.

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если $x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, то $y = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Если $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$, то $y = \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\Big\{\Big(-\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ -\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\Big), \Big(\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ \dfrac{\pi}{6} + \pi k\Big)\Big\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

[1] Другой способ решения приведен в задаче 13.

Задача 12. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}\,, \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}\,. \end{cases} \tag{17}$$

Решение. Тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6} \iff \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 5 - 2\sqrt{6} \iff$$

$$\iff \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} = 5 - 2\sqrt{6}\,.$$

Учитывая, что $x + y = \dfrac{\pi}{4}$, получаем:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos\dfrac{\pi}{4}}{\cos(x-y) + \cos\dfrac{\pi}{4}} = 5 - 2\sqrt{6} \iff \frac{\cos(x-y) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\cos(x-y) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 5 - 2\sqrt{6} \iff$$

$$\iff \frac{\cos(x-y) - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - (5 - 2\sqrt{6}\,)\left(\cos(x-y) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\cos(x-y) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos(x-y) = \dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}\,)}\,, \\ \cos(x-y) \neq -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

так как

$$\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}\,)} = \frac{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\,)(\sqrt{3} + \sqrt{2}\,)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}\,)(\sqrt{3} + \sqrt{2}\,)} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Тогда система (17) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ x+y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x-y = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x+y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x+y = \dfrac{\pi}{4}\,, \end{cases} \\ \begin{cases} x-y = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x+y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{24} + \pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{24} - \pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{24} + \pi n, \\ y = \dfrac{5\pi}{24} - \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left\{ \left(\dfrac{\pi(5+24n)}{24}, \dfrac{\pi(1-24n)}{24} \right), \left(\dfrac{\pi(1+24n)}{24}, \dfrac{\pi(5-24n)}{24} \right) \right\}$

при любом целом n.

Другой способ решения систем (13) состоит в использовании производных пропорций.

Задача 13. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 2, \\ x + y = 60^\circ. \end{cases} \tag{18}$$

Решение. По пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

составим производную пропорцию

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}\,.$$

На ее основании преобразуем первое уравнение системы (18):

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 2 \iff \frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} = 2 \iff$$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}=\frac{2+1}{2-1}\ \Longleftrightarrow\ \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=3.$$

Тогда система (18) равносильна системе

$$\begin{cases}\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=3,\\ x+y=60^\circ\end{cases}\Longleftrightarrow\ \begin{cases}\sin(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{6},\\ x+y=60^\circ\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ \begin{cases}x-y=(-1)^k\cdot\left(\dfrac{180}{\pi}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^\circ+180^\circ\cdot k,\\ x+y=60^\circ\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ \begin{cases}x=30^\circ+(-1)^k\cdot\left(\dfrac{90}{\pi}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^\circ+90^\circ\cdot k,\\ y=30^\circ+(-1)^{k+1}\cdot\left(\dfrac{90}{\pi}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^\circ-90^\circ\cdot k,\ \forall k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Ответ: $\big\{\big(30^\circ+(-1)^k\cdot\varphi^\circ+90^\circ\cdot k, 30^\circ+(-1)^{k+1}\cdot\varphi^\circ-90^\circ\cdot k\big)\big\}$,
$\forall k\in\mathbb{Z}$, где $\varphi=\dfrac{90}{\pi}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Наряду с методом исключения переменной могут быть использованы производные пропорции при решении систем, у которых одно уравнение содержит частное тригонометрических функций синус и косинус, а другое — сумму или разность их аргументов:

$$\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=a,\\ x\pm y=b;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\cos x}{\cos y}=a,\\ x\pm y=b;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\sin x}{\cos y}=a,\\ x\pm y=b;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\cos y}{\sin x}=a,\\ x\pm y=b.\end{cases}\qquad (19)$$

Задача 14. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\cos x}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ x-y=-\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}\qquad (20)$$

Решение[1]. С учетом второго уравнения системы (20) преобразуем первое уравнение этой системы:

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\cos\left(y - \dfrac{\pi}{6}\right)}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}\,\cos\left(y - \dfrac{\pi}{6}\right) - \cos y}{\sqrt{3}\,\cos y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ \frac{\sqrt{3}\left(\cos y \cos\dfrac{\pi}{6} + \sin y \sin\dfrac{\pi}{6}\right) - \cos y}{\cos y} = 0 \ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ \frac{\dfrac{3}{2}\,\cos y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\sin y - \cos y}{\cos y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\dfrac{1}{2}\,\cos y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\sin y}{\cos y} = 0 \ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ \frac{\cos\dfrac{\pi}{3}\,\cos y + \sin\dfrac{\pi}{3}\,\sin y}{\cos y} = 0 \ \Longleftrightarrow \ \frac{\cos\left(y - \dfrac{\pi}{3}\right)}{\cos y} = 0 \ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ \cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \ \Longleftrightarrow \ y = \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

так как $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6} + \pi k\right) \neq 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Тогда

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{2\pi}{3} + \pi k,\ \dfrac{5\pi}{6} + \pi k\right)\right\},\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Задача 15. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = 2, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3}\,. \end{cases} \tag{21}$$

[1] Другой способ решения приведен в задаче 15.

Решение[1]. По пропорции $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ составим производную пропорцию

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}\,.$$

На ее основании преобразуем первое уравнение системы (21):

$$\frac{\sin x}{\sin y} = 2 \iff \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{2+1}{2-1} \iff$$

$$\iff \frac{\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}} = 3 \iff \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2} = 3.$$

Учитывая, что $x + y = \dfrac{2\pi}{3}$, находим

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\,.$$

Тогда система (21) равносильна системе

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}\dfrac{x-y}{2} = \sqrt{3}\,, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3}\,, \end{cases}$$

из которой находим

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ y = \frac{\pi}{6} - \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}(1+2n), \dfrac{\pi}{6}(1-6n)\right)\right\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Кроме метода исключения переменной, системы видов

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = a, \\ x \pm y = b; \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = a, \\ x \pm y = b; \end{cases}$$

[1] Другой способ решения приведен в задаче 14.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} y = a, \\ x \pm y = b, \end{cases} \tag{22}$$

где знаки берутся в любом сочетании, могут быть решены с использованием формул суммы и разности тангенсов и котангенсов.

Задача 16. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2, \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases} \tag{23}$$

Решение. Из второго уравнения системы (23) следует:

$$x = \frac{3\pi}{4} - y.$$

При этом первое уравнение будет иметь вид:

$$\operatorname{tg}\Big(\frac{3\pi}{4} - y\Big) - \operatorname{tg} y = 2 \iff \frac{\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4} - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}\ \operatorname{tg} y} - \operatorname{tg} y = 2 \iff$$

$$\iff \frac{1 + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y + 2 = 0 \iff \frac{\operatorname{tg}^2 y - 3}{1 - \operatorname{tg} y} = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} y = -\sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} y = \sqrt{3} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{\pi}{3} + \pi n, \\ y = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Следовательно, множеством решений системы (23) будет

$$\Big\{\Big(\frac{\pi}{12} - \pi n,\ -\frac{\pi}{3} + \pi n\Big),\ \Big(\frac{5\pi}{12} - \pi n,\ \frac{\pi}{3} + \pi n\Big)\Big\},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\Big\{\Big(\dfrac{\pi}{12} - \pi n,\ -\dfrac{\pi}{3} + \pi n\Big),\ \Big(\dfrac{5\pi}{12} - \pi n,\ \dfrac{\pi}{3} + \pi n\Big)\Big\},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$

Задача 17. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}\,. \end{cases} \tag{24}$$

Решение. Первое уравнение системы (24) равносильно уравнению

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \frac{2}{\sqrt{3}} \iff \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Поскольку $x - y = \dfrac{\pi}{6}$, то

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{3}\sin(x+y) = \cos(x+y) + \frac{\sqrt{3}}{2} \iff$$

$$\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+y) - \frac{1}{2}\cos(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{4} \iff$$

$$\iff \cos\frac{\pi}{6}\sin(x+y) - \sin\frac{\pi}{6}\cos(x+y) = \frac{\sqrt{3}}{4} \iff$$

$$\iff \sin\Big((x+y) - \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{4} \iff x+y = \frac{\pi}{6} + (-1)^k \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{4} + \pi k,$$

где k — любое целое число.

Отсюда, учитывая, что $x - y = \dfrac{\pi}{6}$, находим:

$$x = \frac{\pi}{6} + A,\ y = A,$$

где $A = \dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\Big\{\Big(\dfrac{\pi}{6} + A,\ A\Big)\Big\}$, $A = \dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Задача 18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3, \\ |x-y| = \dfrac{\pi}{3}\,. \end{cases} \tag{25}$$

Решение. Первое уравнение системы (25) равносильно уравнению

$$\frac{\sin x \sin y + \cos x \cos y}{\cos x \sin y} = 3 \iff \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y} = 3.$$

Учитывая четность функции косинус, составляем тождество

$$\cos(x-y) = \cos|x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

на основании которого при $|x-y| = \dfrac{\pi}{3}$ первое уравнение системы (25) приводим к виду

$$\frac{\cos\dfrac{\pi}{3}}{\cos x \sin y} = 3 \iff 2\cos x \sin y = \frac{1}{3} \iff$$

$$\iff \sin(y-x) + \sin(y+x) = \frac{1}{3}\,.$$

Раскрывая модуль, систему (25) заменяем равносильной совокупностью двух систем.

Первая система

$$\begin{cases} \sin(y-x) + \sin(y+x) = \dfrac{1}{3}\,, \\ y - x = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(y+x) = \dfrac{2+3\sqrt{3}}{6}\,, \\ y - x = -\dfrac{\pi}{3}\,, \end{cases}$$

и не имеет решений, так как

$$|\sin(y+x)| \leqslant 1, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

а

$$16 < 27 \iff 4 < 3\sqrt{3} \iff 6 < 2 + 3\sqrt{3} \iff 1 < \frac{2+3\sqrt{3}}{6}\,.$$

Вторая система

$$\begin{cases} \sin(y-x)+\sin(y+x)=\dfrac{1}{3}\,, \\ y-x=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin(y+x)=\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}\,, \\ y-x=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y+x=(\,-1)^n\cdot\arcsin\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}+\pi n, \\ y-x=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\,-\dfrac{\pi}{6}+(\,-1)^n\cdot\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\pi}{2}\,n, \\ y=\dfrac{\pi}{6}+(\,-1)^n\cdot\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\pi}{2}\,n,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(-\dfrac{\pi}{6}+(\,-1)^n\cdot\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\pi}{2}\,n,\right.\right.$

$\left.\left.\dfrac{\pi}{6}+(\,-1)^n\cdot\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2-3\sqrt{3}}{6}+\dfrac{\pi}{2}\,n\right)\right\},\ \forall n\in\mathbb{Z}.$

2. Системы, в которых оба уравнения содержат тригонометрические функции

1. Общим подходом к решению объединены тригонометрические системы видов:

$$\begin{cases}\sin x\sin y=a,\\ \cos x\cos y=b\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}\sin x\cos y=a,\\ \cos x\sin y=b.\end{cases} \tag{1}$$

Задача 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{1}{4},\\ \cos x\cos y=\dfrac{3}{4}.\end{cases} \tag{2}$$

Решение. Сложением и вычитанием (из второго уравнения первого) уравнений системы (2) приводим эту систему к равносильной системе

$$\begin{cases}\sin x\sin y+\cos x\cos y=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4},\\ \cos x\cos y-\sin x\sin y=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}\end{cases} \iff \begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}x-y=2\pi k,\\ \left[\begin{array}{l}x+y=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\\ x+y=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\end{array}\right.\end{cases} \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=2\pi k,\\ x+y=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=2\pi k,\\ x+y=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi(n+k),\\ y=-\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-k),\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+\pi(n+k),\\ y=\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-k),\ \forall k,n\in\mathbb{Z}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\Big\{\Big(-\dfrac{\pi}{6}+\pi(n+k),\ -\dfrac{\pi}{6}+\pi(n-k)\Big),$

$\Big(\dfrac{\pi}{6}+\pi(n+k),\ \dfrac{\pi}{6}+\pi(n-k)\Big)\Big\},\ \forall k,n\in\mathbb{Z}.$

Задача 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin\bigl(x-2^\circ\bigr)\cos\bigl(2y+1^\circ\bigr) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}\,, \\[2ex] \sin\bigl(2y+1^\circ\bigr)\cos\bigl(x-2^\circ\bigr) = -\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\,. \end{cases} \tag{3}$$

Решение. Система (3) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin\bigl(x-2^\circ\bigr)\cos\bigl(2y+1^\circ\bigr)+\sin\bigl(2y+1^\circ\bigr)\cos\bigl(x-2^\circ\bigr) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\[2ex] \sin\bigl(x-2^\circ\bigr)\cos\bigl(2y+1^\circ\bigr)-\sin\bigl(2y+1^\circ\bigr)\cos\bigl(x-2^\circ\bigr) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin\bigl(x+2y-1^\circ\bigr) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\[2ex] \sin\bigl(x-2y-3^\circ\bigr) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) равносильна совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} x+2y-1^\circ = -60^\circ+360^\circ\cdot k, \\ x-2y-3^\circ = 45^\circ+360^\circ\cdot n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5^\circ 30'+180^\circ\cdot(k+n), \\ y = -26^\circ 45'+90^\circ\cdot(k-n); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-1^\circ = -60^\circ+360^\circ\cdot k, \\ x-2y-3^\circ = 135^\circ+360^\circ\cdot n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 39^\circ 30'+180^\circ\cdot(k+n), \\ y = -49^\circ 15'+90^\circ\cdot(k-n); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-1^\circ = -120^\circ+360^\circ\cdot k, \\ x-2y-3^\circ = 45^\circ+360^\circ\cdot n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -39^\circ 30'+180^\circ\cdot(k+n), \\ y = -41^\circ 45'+90^\circ\cdot(k-n); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-1^\circ = -120^\circ+360^\circ\cdot k, \\ x-2y-3^\circ = 135^\circ+360^\circ\cdot n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9^\circ 30'+180^\circ\cdot(k+n), \\ y = -64^\circ 15'+90^\circ\cdot(k-n), \end{cases}$$

где k и n — любые целые числа.

Ответ: $\{(-5°30'+180°\cdot(k+n),\ -26°45'+90°\cdot(k-n)),\ (39°30'+180°\cdot(k+n),\ -49°15'+90°\cdot(k-n)),\ (-39°30'+180°\cdot(k+n),\ -41°45'+90°\cdot(k-n)),\ (9°30'+180°\cdot(k+n),\ -64°15'+90°\cdot(k-n))\}$, $\forall k, n \in \mathbb{Z}$.

2. К решению систем (1) приводятся системы:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = b, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = b, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = b, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} y = b. \end{cases}$$

Задача 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Решение. Система уравнений (5) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin(x+y) = -1, \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x - y = \pi k \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}(2n+k), \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}(2n-k), \ \forall n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4}(4n+2k-1), \dfrac{\pi}{4}(4n-2k-1)\right)\right\}, \ \forall n, k \in \mathbb{Z}.$

Задача 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} y. \end{cases} \tag{6}$$

Решение. Система (6) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} = 3. \end{cases}$$

Полученная система равносильна системе (2).

Ответ: $\left\{\left(-\dfrac{\pi}{6} + \pi(n+k), -\dfrac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right),\right.$

$$\left.\left(\dfrac{\pi}{6} + \pi(n+k), \dfrac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right)\right\}, \ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$$

3. Системы (знаки берутся в любом сочетании)

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a, \\ \cos x \pm \cos y = b \end{cases}$$

решаются с использованием формул суммы и разности тригонометрических функций синус и косинус.

Задача 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}. \end{cases} \tag{7}$$

Решение. Используя формулу суммы синусов и формулу разности косинусов, систему (7) приводим к равносильной системе

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\,\cos\dfrac{x-y}{2} = 1, \\ -\,2\sin\dfrac{x+y}{2}\,\sin\dfrac{x-y}{2} = \sqrt{3}\,. \end{cases} \tag{8}$$

Разделим второе уравнение системы (8) на первое уравнение этой системы. В результате получим уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = -\sqrt{3} \iff x-y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь систему (7) заменим равносильной системой

$$\begin{cases} x-y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi k, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = x + \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi k, \\ \cos x - \cos\Bigl(x + \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi k\Bigr) = \sqrt{3}\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{9}$$

Так как

$$\cos(\alpha - 2\pi k) = \cos\alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то второе уравнение системы (9) равносильно уравнению

$$\cos x - \cos\Bigl(x + \frac{2\pi}{3}\Bigr) = \sqrt{3} \iff -2\sin\Bigl(x + \frac{\pi}{3}\Bigr)\sin\Bigl(-\frac{\pi}{3}\Bigr) = \sqrt{3} \iff$$

$$\iff -2\sin\Bigl(x + \frac{\pi}{3}\Bigr)\cdot\Bigl(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Bigr) = \sqrt{3} \iff \sin\Bigl(x + \frac{\pi}{3}\Bigr) = 1 \iff$$

$$\iff x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \iff x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Из первого уравнения системы (9) находим

$$y = \frac{\pi}{6} + 2\pi m + \frac{2\pi}{3} - 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi(m-k),\ \forall m, k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, решениями системы (7) будут упорядоченные пары чисел

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi(m-k)\right),\ \forall m, k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что вне зависимости от $m \in \mathbb{Z}$ разность $m-k$ является произвольным целым числом (так как k — любое целое число).

Поэтому решения системы (7) можно записать с помощью упорядоченных пар

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)\right\},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$

4. С использованием формул суммы и разности тангенсов решаются некоторые тригонометрические системы, у которых одно из уравнений имеет вид:

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = a.$$

Задача 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = 0{,}5. \end{cases} \qquad (10)$$

Решение. Система уравнений (10) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 2, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ 2\cos x \cos y = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \cos(x-y) + \cos(x+y) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \cos(x-y) = 1 \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x-y=2\pi n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi(k+n), \\ y=\dfrac{\pi}{4}+\pi(k-n),\ \forall n,k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Было использовано, что если $\sin(x+y)=1$, то $\cos(x+y)=0$.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi(k+n), \dfrac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right)\right\}$, $\forall n,k\in\mathbb{Z}$.

Задача 7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=1, \\ \cos x\,\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{cases} \tag{11}$$

Решение. В соответствии с формулой разности тангенсов система (11) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\,\cos y}=1, \\ \cos x\,\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin(x-y)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ \cos x\,\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-y=(-1)^l\cdot\dfrac{\pi}{4}+\pi l,\ \forall l\in\mathbb{Z}, \\ \cos(x-y)+\cos(x+y)=\sqrt{2}\,. \end{cases} \tag{12}$$

Если $l=2k$, то

$$x-y=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$$

при этом второе уравнение системы (12) примет вид:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)+\cos(x+y)=\sqrt{2} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(x+y)=\sqrt{2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \cos(x+y)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow x+y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Таким образом, при $l=2k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$ система (12) равносильна совокупности двух алгебраических систем:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x+y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi(k+n), \\ y=\pi(n-k),\ \forall k,n\in\mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x+y=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x=\pi(k+n), \\ y=-\dfrac{\pi}{4}+\pi(n-k),\ \forall k,n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Если $l=2k+1$, то

$$x-y=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$$

при этом второе уравнение системы (12) примет вид:

$$\cos\Big(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\Big)+\cos(x+y)=\sqrt{2} \iff -\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos(x+y)=\sqrt{2} \iff$$

$$\iff \cos(x+y)=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

и не имеет решений, так как $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>1$, а $\cos(x+y)\leqslant 1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Ответ: $\Big\{\Big(\dfrac{\pi}{4}+\pi(k+n),\ \pi(n-k)\Big),\ \Big(\pi(k+n),\ -\dfrac{\pi}{4}+\pi(n-k)\Big)\Big\}$,

где k и n — любые целые числа.

5. С использованием формул произведения тригонометрических функций синус и косинус решаются, например, такие системы.

Задача 8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=2, \\ \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=-\dfrac{9}{5}. \end{cases} \tag{13}$$

Решение. Система (13) равносильна системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = 2, \\[2ex] \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} + \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}}{2\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}} = -\dfrac{9}{5}\,. \end{cases}$$

Подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u \neq 0, \ \ \operatorname{tg}\frac{y}{2} = v \neq 0$$

получаем:

$$\begin{cases} u+v=2, \\ v - vu^2 + u - uv^2 = -\dfrac{18}{5}\,uv \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} u+v=2, \\ (u+v)(1-uv) = -\dfrac{18}{5}\,uv \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} u+v=2, \\ 2(1-uv) = -\dfrac{18}{5}\,uv \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=2, \\ uv = -\dfrac{5}{4}\,. \end{cases}$$

Согласно обратной теореме Виета u и v являются корнями приведенного квадратного уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda - \frac{5}{4} = 0 \iff \Big(\lambda + \frac{1}{2}\Big)\Big(\lambda - \frac{5}{2}\Big) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{1}{2}\,, \\[2ex] \lambda = 2\dfrac{1}{2}\,. \end{array}\right.$$

Следовательно, решениями алгебраической системы будут упорядоченные пары

$$\Big(-\frac{1}{2}\,, 2\frac{1}{2}\Big) \quad \text{и} \quad \Big(2\frac{1}{2}\,, -\frac{1}{2}\Big).$$

Итак, система (13) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = 2\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi k, \\ y = 2\operatorname{arctg} 2\dfrac{1}{2} + 2\pi n,\ \forall k, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 2\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\operatorname{arctg} 2\dfrac{1}{2} + 2\pi k, \\ y = -2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi n,\ \forall k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\Big\{\Big(-2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi k,\ 2\operatorname{arctg} 2\dfrac{1}{2} + 2\pi n\Big),$

$$\Big(2\operatorname{arctg} 2\dfrac{1}{2} + 2\pi k,\ -2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + 2\pi n\Big)\Big\},\ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases} \tag{14}$$

Решение. Система (14) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin x \sin y, \\ \cos^2 x - 1 = \cos x \cos y \end{cases} \iff \begin{cases} -\cos^2 x = \sin x \sin y, \\ -\sin^2 x = \cos x \cos y. \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнения:

$$-(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos x\ \cos y + \sin x\ \sin y \iff \cos(x - y) = -1 \iff$$

$$\iff x - y = \pi + 2\pi k \iff x = \pi + 2\pi k + y,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Подставим это значение x в первое уравнение:

$$-\cos^2 y = -\sin^2 y \iff \cos^2 y - \sin^2 y = 0 \iff$$

$$\iff \cos 2y = 0 \iff y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$x = \frac{5\pi}{4} + \pi\Big(2k + \frac{n}{2}\Big), \ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$$

Значит, множество решений системы (14) состоит из упорядоченных пар:

$$\Big\{\Big(\frac{5\pi}{4} + \pi\Big(2k + \frac{n}{2}\Big), \ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\Big)\Big\}, \ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\Big\{\Big(\frac{5\pi}{4} + \pi\Big(2k + \frac{n}{2}\Big), \ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\Big)\Big\}, \ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2}\,\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{1}{2}\,, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4}\,. \end{cases} \tag{15}$$

Решение. Первое уравнение системы (15) преобразуем с использованием формулы произведения косинусов.

В результате получим систему, равносильную системе (15):

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4}\,. \end{cases}$$

Пусть

$$\cos x = u, \ \cos y = v.$$

Тогда

$$u + v = 1, \ \ uv = \frac{1}{4}\,.$$

По обратной теореме Виета u и v являются корнями приведенного квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \iff \Big(\lambda - \frac{1}{2}\Big)^2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2}\,.$$

Значит,

$$u = v = 0{,}5.$$

Система (15) равносильна системе двух простейших тригонометрических уравнений:

$$\cos x = 0{,}5 \quad \text{и} \quad \cos y = 0{,}5.$$

Множество решений системы (15) состоит из множества упорядоченных пар чисел:

$$\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),$$

$$\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),\right.$

$\left.\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)\right\},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 11. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{11}{16}, \\ \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{5}{8}. \end{cases} \tag{16}$$

Решение. Первое уравнение системы (16) преобразуем с использованием основного тригонометрического тождества, а второе уравнение — с использованием формулы произведения синуса на косинус.

В результате получим систему, равносильную системе (16):

$$\begin{cases} \sin^2 x + 1 - \sin^2 y = \dfrac{11}{16}, \\ \dfrac{1}{2}(\sin x + \sin y) = \dfrac{5}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = -\dfrac{5}{16}, \\ \sin x + \sin y = \dfrac{5}{4} \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\sin x - \sin y)(\sin x + \sin y) = -\dfrac{5}{16}, \\ \sin x + \sin y = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x - \sin y = -\dfrac{1}{4}, \\ \sin x + \sin y = \dfrac{5}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = (-1)^m \cdot \arcsin \dfrac{3}{4} + \pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left((-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ (-1)^m \cdot \arcsin \dfrac{3}{4} + \pi m\right)\right\},\ \forall k, m \in \mathbb{Z}.$

6. Тригонометрические системы, содержащие уравнения

$$\sin^2 x \pm \sin^2 y = a,\ \cos^2 x \pm \cos^2 y = a,\ \sin^2 x \pm \cos^2 y = a,$$

решаются с использованием основного тригонометрического тождества. Например, так решалась система (16).

Задача 12. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos 2x + 2\cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}. \end{cases} \tag{17}$$

Решение. Система (17) равносильна системе

$$\begin{cases} 1 - 2\sin^2 x + 2\cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x - \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Пусть

$$u = \sin^2 x,\ v = \cos y.$$

Тогда

$$\begin{cases} u - v = 0, \\ u + v^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ v^2 + v - \dfrac{3}{4} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ \left(v + \dfrac{3}{2}\right)\left(v - \dfrac{1}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

и решениями будут

$$u = v = \ -1\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad u = v = \frac{1}{2}\,.$$

Учитывая, что в силу замены $u \geqslant 0$, получаем, что система (17) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1}{2}\,, \\ \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\sin x| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\,n, \\ y = \ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\,n, \\ y = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \end{array}\right.$$

где n и k — любые целые числа.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\,n,\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\,n,\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right)\right\}, \forall n, k \in \mathbb{Z}.$

Задача 13. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 0{,}5, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1{,}75. \end{cases} \tag{18}$$

Решение. Второе уравнение системы (18) равносильно уравнению

$$1 - \cos^2 x + 1 - \cos^2 y = 1{,}75 \iff \cos^2 x + \cos^2 y = 0{,}25.$$

Из первого уравнения системы (18) выразим

$$\cos y = 0{,}5 - \cos x.$$

Тогда

$$\cos^2 x + (0{,}5 - \cos x)^2 = 0{,}25 \iff 2\cos^2 x - \cos x = 0 \iff$$

$$\iff \cos x(2\cos x - 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x = 0{,}5.\end{array}\right.$$

Следовательно, система (18) равносильна совокупности двух тригонометрических систем:

$$\begin{cases}\cos x = 0,\\ \cos y = 0{,}5 - \cos x\end{cases} \iff \begin{cases}\cos x = 0,\\ \cos y = 0{,}5\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}x = 90^\circ + 180^\circ \cdot k,\\ y = \pm 60^\circ + 360^\circ \cdot n,\ \forall k, n \in \mathbb{Z};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x = 0{,}5,\\ \cos y = 0{,}5 - \cos x\end{cases} \iff \begin{cases}\cos x = 0{,}5,\\ \cos y = 0\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}x = \pm 60^\circ + 360^\circ \cdot k,\\ y = 90^\circ + 180^\circ \cdot n,\ \forall k, n \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

Ответ: $\big\{\big(90^\circ+180^\circ\cdot k,\ 60^\circ+360^\circ\cdot n\big),\ \big(90^\circ+180^\circ\cdot k,\ -60^\circ+360^\circ\cdot n\big),$ $\big(60^\circ+360^\circ\cdot k,\ 90^\circ+180^\circ\cdot n\big),\ \big(-60^\circ+360^\circ\cdot k,\ 90^\circ+180^\circ\cdot n\big)\big\},\ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 14. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{2}\,\sin x = \sin y,\\ \sqrt{2}\,\cos x = \sqrt{5}\,\cos y.\end{cases} \tag{19}$$

Решение. Возведем обе части каждого уравнения в квадрат и сложим. Получим уравнение-следствие системы (19):

$$2\sin^2 x + 2\cos^2 x = \sin^2 y + 5\cos^2 y \iff \sin^2 y + 5\cos^2 y = 2 \iff$$

$$\iff 1 + 4\cos^2 y = 2 \iff \cos^2 y = \frac{1}{4} \iff \cos y = \pm\frac{1}{2}.$$

а) Если

$$\cos y = \frac{1}{2},$$

то из второго уравнения системы (19) следует, что

$$\cos x = \frac{\sqrt{10}}{4}\,.$$

Если

$$\cos x = \frac{\sqrt{10}}{4}\,,$$

то

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}\,.$$

Если

$$\cos y = \frac{1}{2}\,,$$

то

$$\sin y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Проверкой убеждаемся, что набор

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}\,,\ \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и набор

$$\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{4}\,,\ \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

удовлетворяют первому уравнению системы (19); два других: набор

$$\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{4}\,,\ \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и набор

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}\,,\ \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

первому уравнению системы (19) не удовлетворяют.

Если

$$\cos x = \frac{\sqrt{10}}{4}\,,\ \sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}\,,$$

то

$$x = \arccos\frac{\sqrt{10}}{4} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если

$$\cos y = \frac{1}{2}\,,\ \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

то

$$y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Если

$$\cos x = \frac{\sqrt{10}}{4}\,,\ \sin x = -\frac{\sqrt{6}}{4}\,,$$

то

$$x = -\arccos\frac{\sqrt{10}}{4} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если

$$\cos y = \frac{1}{2}\,,\ \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

то

$$y = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

б) Если

$$\cos y = -\frac{1}{2}\,,$$

то из второго уравнения системы (19) следует, что

$$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{4}\,.$$

Если

$$\cos y = -\frac{1}{2},$$

то

$$\sin y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если

$$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{4},$$

то

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Проверкой убеждаемся, что из четырех возможных наборов первому уравнению системы (19) удовлетворяют только два набора: набор

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}, \;\; \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

и набор

$$\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \;\; \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если

$$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{4}, \;\; \sin x = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

то

$$x = \pi - \arccos\frac{\sqrt{10}}{4} + 2\pi k, \; \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если

$$\cos y = -\frac{1}{2}, \;\; \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

то

$$y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Если

$$\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{4},\ \ \sin x = -\frac{\sqrt{6}}{4},$$

то

$$x = -\pi + \arccos\frac{\sqrt{10}}{4} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если

$$\cos y = -\frac{1}{2},\ \ \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то

$$y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\Big\{\Big(A + 2\pi k,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n\Big),\ \Big(-A + 2\pi k,\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\Big),$ $\Big(\pi - A + 2\pi k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\Big),\ \Big(-\pi + A + 2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\Big)\Big\},\ \forall k, n \in \mathbb{Z},$ где $A = \arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Задача 15. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\sin x - 2\sin y = 3, \\ 2\cos x - \cos y = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Решение. Система (20) равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}\sin y, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}\cos y. \end{cases} \tag{21}$$

Возведя уравнения системы (21) в квадрат, а затем складывая полученные равенства, получим уравнение, являющееся следствием системы (21):

$$1=\frac{9}{16}+\frac{3}{4}\sin y+\frac{1}{4}\sin^2 y+\frac{1}{4}\cos^2 y \iff$$

$$\iff \sin y=\frac{1}{4} \iff y=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1}{4}+\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

При $\sin y=0{,}25$ из первого уравнения системы (21) получим, что

$$\sin x=\frac{7}{8} \iff x=(-1)^m\cdot\arcsin\frac{7}{8}+\pi m,\ \forall m\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку при решении использовалась операция возведения в квадрат, то могли появиться посторонние решения. Поэтому необходимо произвести отбор, подставив найденные значения x и y во второе уравнение системы (20).

Второе уравнение системы (20)

$$2\cos x-\cos y=0 \iff 2\cos x=\cos y$$

требует, чтобы $\cos x$ и $\cos y$ были одного знака. Это возможно, если только m и n оба четные (соответствующие значения $\cos x$ и $\cos y$ будут положительными) или оба нечетные (соответствующие значения $\cos x$ и $\cos y$ будут отрицательными).

Итак, следует взять лишь

$$\begin{cases} x=\arcsin\dfrac{7}{8}+2\pi k, \\ y=\arcsin\dfrac{1}{4}+2\pi l \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=-\arcsin\dfrac{7}{8}+\pi(2k+1), \\ y=-\arcsin\dfrac{1}{4}+\pi(2l+1), \end{cases}$$

где k и l — целые числа.

Поскольку

$$2\cos\Bigl(\arcsin\frac{7}{8}+2\pi k\Bigr)=2\cos\Bigl(\arcsin\frac{7}{8}\Bigr)=2\sqrt{1-\sin^2\Bigl(\arcsin\frac{7}{8}\Bigr)}=$$

$$=2\sqrt{1-\frac{49}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\cos\Bigl(\arcsin\frac{1}{4}+2\pi l\Bigr)=\cos\Bigl(\arcsin\frac{1}{4}\Bigr)=\sqrt{1-\sin^2\Bigl(\arcsin\frac{1}{4}\Bigr)}=$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}\,,$$

$$2\cos\Bigl(-\arcsin\frac{7}{8} + 2\pi k + \pi\Bigr) = 2\cos\Bigl(\pi - \arcsin\frac{7}{8}\Bigr) =$$

$$= -2\cos\Bigl(\arcsin\frac{7}{8}\Bigr) = -\frac{\sqrt{15}}{4}\,,$$

$$\cos\Bigl(-\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi l + \pi\Bigr) = \cos\Bigl(\pi - \arcsin\frac{1}{4}\Bigr) =$$

$$= -\cos\Bigl(\arcsin\frac{1}{4}\Bigr) = -\frac{\sqrt{15}}{4}\,,\ \forall k, l \in \mathbb{Z},$$

то система (20) равносильна совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \arcsin\dfrac{7}{8} + 2\pi k, \\ y = \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi l, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\arcsin\dfrac{7}{8} + \pi(2k+1), \\ y = -\arcsin\dfrac{1}{4} + \pi(2l+1) \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = (-1)^p \cdot \arcsin\dfrac{7}{8} + \pi p, \\ y = (-1)^p \cdot \arcsin\dfrac{1}{4} + \pi(p + 2q), \end{cases}$$

где k, l, p, q — целые числа.

Ответ:

$$\Bigl\{\Bigl((-1)^p \cdot \arcsin\frac{7}{8} + \pi p,\ (-1)^p \cdot \arcsin\frac{1}{4} + \pi(p + 2q)\Bigr)\Bigr\},\ \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

Задача 16. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 6\cos x + 4\cos y = 5, \\ 3\sin x + 2\sin y = 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Решение. Первое уравнение системы (22) запишем в виде

$$6\cos x = 5 - 4\cos y,$$

а второе уравнение этой системы запишем в виде

$$6\sin x = -4\sin y.$$

Оба равенства возведем в квадрат и сложим:

$$36\cos^2 x + 36\sin^2 x = (5 - 4\cos y)^2 + 16\sin^2 y \iff$$

$$\iff 36 = 25 - 40\cos y + 16\cos^2 y + 16\sin^2 y \iff$$

$$\iff \cos y = \frac{1}{8} \iff y = \pm\arccos\frac{1}{8} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Из первого уравнения системы (22) с учетом того, что $\cos y = \dfrac{1}{8}$, получаем простейшее тригонометрическое уравнение

$$\cos x = \frac{3}{4} \iff x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

При возведении в квадрат могли быть получены посторонние корни. Выполним проверку.

При этом учтем, что

$$\sin\Bigl(-\arccos\frac{1}{8}\Bigr) = -\sin\Bigl(\arccos\frac{1}{8}\Bigr) = -\sqrt{1 - \frac{1}{64}} = -\frac{\sqrt{63}}{8} = -\frac{3\sqrt{7}}{8},$$

а

$$\sin\Bigl(-\arccos\frac{3}{4}\Bigr) = -\sin\Bigl(\arccos\frac{3}{4}\Bigr) = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Если

$$x = \arccos\frac{3}{4} + 2\pi m,\ \ y = \arccos\frac{1}{8} + 2\pi k,\ \forall k, m \in \mathbb{Z},$$

и если

$$x = -\arccos\frac{3}{4} + 2\pi m,\;\; y = -\arccos\frac{1}{8} + 2\pi k,\; \forall k, m \in \mathbb{Z},$$

то выражение $3\sin x + 2\sin y$ не равно нулю:

$$3\sin\Big(\arccos\frac{3}{4} + 2\pi m\Big) + 2\sin\Big(\arccos\frac{1}{8} + 2\pi k\Big) =$$

$$= 3\sin\arccos\frac{3}{4} + 2\sin\arccos\frac{1}{8} = 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} + 2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2};$$

$$3\sin\Big(-\arccos\frac{3}{4} + 2\pi m\Big) + 2\sin\Big(-\arccos\frac{1}{8} + 2\pi k\Big) =$$

$$= 3\sin\Big(-\arccos\frac{3}{4}\Big) + 2\sin\Big(-\arccos\frac{1}{8}\Big) = -\frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Аналогичными вычислениями устанавливаем, что пары чисел

$$x = \arccos\frac{3}{4} + 2\pi m,\;\; y = -\arccos\frac{1}{8} + 2\pi k,\; \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

и

$$x = -\arccos\frac{3}{4} + 2\pi m,\;\; y = \arccos\frac{1}{8} + 2\pi k,\; \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

удовлетворяют второму уравнению системы (22). Следовательно, только они образуют множество решений системы (22).

Ответ: $\Big\{\Big(-\arccos\frac{3}{4} + 2\pi m, \arccos\frac{1}{8} + 2\pi k\Big),$

$\Big(\arccos\frac{3}{4} + 2\pi m, -\arccos\frac{1}{8} + 2\pi k\Big)\Big\},\; \forall k, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 17. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\cos 3x = \sin(x + 2y), \\ 3\sin(2x + y) = -\cos 3y. \end{cases} \tag{23}$$

Решение. Заметим, что сумма аргументов косинусов в уравнениях системы, равная $3x + 3y$, совпадает с суммой аргументов синусов

$$(x + 2y) + (2x + y) = 3x + 3y.$$

Учитывая это обстоятельство, перемножим уравнения системы „крест-накрест“, т.е. умножим левую часть одного уравнения на правую часть другого.

В результате получим тригонометрическое уравнение

$$-3\cos 3x \cos 3y = 3\sin(x + 2y)\sin(2x + y) \iff$$

$$\iff -\cos(3x - 3y) - \cos(3x + 3y) = \cos(-x + y) - \cos(3x + 3y) \iff$$

$$\iff \cos(y - x) + \cos(3x - 3y) = 0 \iff$$

$$\iff \cos(x - y)\cos(2x - 2y) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos(x - y) = 0, \\ \cos(2x - 2y) = 0. \end{array}\right.$$

Поскольку полученная совокупность равенств является следствием системы (23), то можем считать, что система (23) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 0, \\ 3\cos 3x = \sin(x + 2y), \\ 3\sin(2x + y) = -\cos 3y \end{cases} \tag{24}$$

и

$$\begin{cases} \cos(2x - 2y) = 0, \\ 3\cos 3x = \sin(x + 2y), \\ 3\sin(2x + y) = -\cos 3y. \end{cases} \tag{25}$$

Из уравнения

$$\cos(x - y) = 0$$

находим, что

$$x = y + \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому система (24) равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} x = y + \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ 3\cos\Bigl(3y + \dfrac{3\pi}{2} + 3\pi n\Bigr) = \sin\Bigl(3y + \dfrac{\pi}{2} + \pi n\Bigr), \\ 3\sin(3y + \pi + 2\pi n) = -\cos 3y \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = y + \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ 3\sin 3y = \cos 3y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = y + \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ \operatorname{tg} 3y = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi}{3}\, m, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \dfrac{\pi}{3}\,(m + 3n), \ \forall m, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Из тригонометрического уравнения

$$\cos(2x - 2y) = 0$$

находим, что

$$x = y + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\, k, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому система (25) равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} x = y + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\, k, \\ 3\cos\Bigl(3y + \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{2}\, k\Bigr) = \sin\Bigl(3y + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\, k\Bigr), \\ 3\sin\Bigl(3y + \dfrac{\pi}{2} + \pi k\Bigr) = -\cos 3y, \ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \tag{26}$$

Третье уравнение системы (26) равносильно уравнению

$$3\cos(3y + \pi k) + \cos 3y = 0 \iff$$

$$\iff 3 \cdot (-1)^k \cdot \cos 3y + \cos 3y = 0 \iff$$

$$\Longleftrightarrow\ \bigl(3\cdot(-1)^k+1\bigr)\cos 3y=0\ \Longleftrightarrow\ \cos 3y=0\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ y=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\,l,\ \forall k,l\in\mathbb{Z}.$$

Тогда второе уравнение системы (26) будет иметь вид:

$$3\cos\Bigl(\pi l+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\,k\Bigr)=\sin\Bigl(\pi l+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\,k\Bigr)\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ 3\sin\Bigl(\pi l+\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\,k\Bigr)+\sin\Bigl(\pi l+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\,k\Bigr)=0\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ 3\cdot(-1)^l\cdot\sin\Bigl(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\,k\Bigr)+(-1)^l\cdot\sin\Bigl(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\,k\Bigr)=0\ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ (-1)^l\cdot\bigl(3\cdot(-1)^k+1\bigr)\sin\Bigl(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\,k\Bigr)=0.$$

Полученное равенство не выполняется ни при каких целых l и k. Поэтому система (25) решений не имеет.

Ответ: $\Bigl\{\Bigl(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\ \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+\frac{\pi}{3}\,(m+3n),\ \frac{1}{3}\ \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}+\frac{\pi}{3}\,m\Bigr)\Bigr\}$,

где m и n — любые целые числа.

§ 4. Решения тригонометрических систем, удовлетворяющие заданным условиям

Среди тригонометрических систем выделим системы, у которых требуется найти решения, удовлетворяющие наперед заданным условиям.

При этом выделяются два подхода, когда начальные условия органически входят в процесс решения задач и когда сначала находятся все решения системы, а затем из полученного множества выделяются те, которые удовлетворяют начальным условиям. Во втором случае по сути решаются две самостоятельные задачи.

Задача 1. Найдите решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ \cos x = \sin y, \end{cases} \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Решение. Возведем уравнения системы (1) в квадрат и сложим. Получим уравнение

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 2y + \sin^2 y \iff 1 = 4\sin^2 y \cos^2 y + \sin^2 y \iff$$

$$\iff 4\sin^2 y(1-\sin^2 y)+\sin^2 y = 1 \iff 4\sin^4 y-5\sin^2 y+1 = 0 \iff$$

$$\iff (4\sin^2 y - 1)(\sin^2 y - 1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \sin^2 y = 0{,}25, \\ \sin^2 y = 1. \end{array}\right.$$

Если $0 \leqslant y \leqslant \pi$, то $\sin y \geqslant 0$.

Поэтому систему (1) будем рассматривать в двух случаях, когда $\sin y = 1$ и когда $\sin y = 0{,}5$.

Если $\sin y = 1$, то $\cos y = 0$, а значит,

$$\sin 2y = 2\sin y \cos y = 0.$$

Из системы (1) получаем, что

$$\sin x = 0 \quad \text{и} \quad \cos x = 1, \quad \text{т.е.} \quad \cos x = 1.$$

Система

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \ \forall l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Условиям

$$0 \leqslant x \leqslant \pi, \ \ 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

удовлетворяют лишь

$$x = 0, \ \ y = \frac{\pi}{2}\,.$$

Если $\sin y = \dfrac{1}{2}$, то

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Пусть

$$\begin{cases} \sin y = \dfrac{1}{2}\,, \\ \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Условию $0 \leqslant y \leqslant \pi$ удовлетворяет $y = \dfrac{\pi}{6}$.

В этом случае из системы (1) получаем, что

$$\begin{cases} \sin x = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,, \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{3} + 2\pi l, \ \forall l \in \mathbb{Z}.$$

Условию $0 \leqslant x \leqslant \pi$ удовлетворяет $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Значит, $x = \dfrac{\pi}{3}$, $y = \dfrac{\pi}{6}$ — решение системы (1), удовлетворяющее условиям $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Если

$$\sin y = \frac{1}{2}, \ \ \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то из первого уравнения системы (1) получаем уравнение

$$\sin x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

ни один корень которого не принадлежит отрезку $[0; \pi]$.

Ответ: $\left\{ \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) \right\}$.

Задача 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos 6x + \cos 8x = 0, \\ \cos 3x = 2\sin^2 2x. \end{cases} \tag{2}$$

Найдите решения, удовлетворяющие условию $|x| < 5$.

Решение. Уравнение

$$\cos 6x + \cos 8x = 0 \iff 2\cos 7x \cos x = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos 7x = 0. \end{array} \right.$$

Если

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то

$$\cos 7x = \cos\left(\frac{7\pi}{2} + 7\pi k\right) = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, первое уравнение системы (2) равносильно уравнению

$$\cos 7x = 0.$$

Уравнение

$$\cos 3x = 2\sin^2 2x \iff \cos 3x = 1 - \cos 4x \iff$$

$$\iff \cos 3x + \cos 4x = 1 \iff \cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos 7x = 0, \\ \cos \dfrac{7x}{2} \cos \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases} \tag{3}$$

Уравнение

$$\cos 7x = 0 \iff 2\cos^2 \frac{7x}{2} - 1 = 0 \iff \cos^2 \frac{7x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Возведем второе уравнение системы (3) в квадрат и учтем, что

$$\cos^2 \frac{7x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

В результате получим равенство

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Следовательно, система (3) равносильна системе трех уравнений

$$\cos^2 \frac{7x}{2} = \frac{1}{2}\,, \;\; \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,, \;\; \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

которая равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos \dfrac{7x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ \cos \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos \dfrac{7x}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ \cos \dfrac{x}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{cases} \tag{4}$$

Если

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \; \forall k \in \mathbb{Z},$$

то

$$\cos \frac{7x}{2} = \cos\Big(\pm \frac{7\pi}{4} + 14\pi k\Big) = \cos\Big(\pm \frac{7\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \; \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, первая система совокупности (4) равносильна уравнению

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Если

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{x}{2} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то

$$\cos\frac{7x}{2} = \cos\Big(\pm\frac{21\pi}{4} + 14\pi k\Big) = \cos\Big(\pm\frac{21\pi}{4}\Big) = \cos\Big(\mp\frac{3\pi}{4} \pm 6\pi\Big) =$$

$$= \cos\Big(\mp\frac{3\pi}{4}\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, вторая система совокупности (4) равносильна уравнению

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Следовательно, совокупность (4) равносильна совокупности двух уравнений:

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \iff 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 0 \iff$$

$$\iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, $\Big\{\frac{\pi}{2} + \pi k\Big\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, — множество решений системы (2).

Выделим те решения системы (2), которые по модулю меньше 5.

Неравенство

$$\Big|\frac{\pi}{2} + \pi k\Big| < 5 \iff -5 < \frac{\pi}{2} + \pi k < 5 \iff$$

$$\iff -5 - \frac{\pi}{2} < \pi k < 5 - \frac{\pi}{2} \iff -\frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} < k < \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2}\,,$$

а значит, k принимает целые значения: $-2, \pm 1, 0$, так как

$$\pi > 2 \iff \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2} \iff \frac{5}{\pi} < \frac{5}{2} \iff -\frac{5}{\pi} > -\frac{5}{2} \iff -\frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} > -3,$$

$$10 > 3\pi \iff \frac{5}{\pi} > \frac{3}{2} \iff -\frac{5}{\pi} < -\frac{3}{2} \iff -\frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} < -2,$$

$$10 > 3\pi \iff \frac{5}{\pi} > \frac{3}{2} \iff \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} > 1,$$

$$\pi > 2 \iff \frac{1}{\pi} < \frac{1}{2} \iff \frac{5}{\pi} < \frac{5}{2} \iff \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} < 2.$$

Итак, $\left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\right\}$ — искомое множество решений.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$; $\left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Задача 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 0{,}5 \end{cases} \tag{5}$$

при $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

Решение. Система (5) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos y = -\sin x, \\ \sin^2 x = 0{,}25. \end{cases}$$

Поскольку

$$\sin x > 0, \ \forall x \in (0; \pi),$$

то поставленная задача сводится к нахождению всех решений системы

$$\begin{cases} \cos y = -\sin x, \\ \sin x = 0{,}5 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos y = -0{,}5, \\ \sin x = 0{,}5, \end{cases}$$

удовлетворяющих условию $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$.

Из всего множества решений

$$\left\{(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k\right\}, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

уравнения

$$\sin x = 0{,}5$$

интервалу $(0;\pi)$ принадлежат два числа $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$.

У простейшего тригонометрического уравнения

$$\cos y = -0{,}5$$

множеством решений является

$$\left\{ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right\},\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

а интервалу $(0;\pi)$ принадлежит только одно число $\dfrac{2\pi}{3}$.

Следовательно, множество решений поставленной задачи состоит из двух упорядоченных пар $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right), \left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{3}\right)\right\}$.

Задача 4. Найдите решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sec y = 2\sqrt[3]{14}, \\ \sin x \sec y = \sqrt[3]{196} - 2, \end{cases} \tag{6}$$

удовлетворяющие условиям $0 < x < \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Подстановкой

$$\sin x = u,\ \sec y = v$$

тригонометрическую систему (6) приводим к алгебраической системе

$$\begin{cases} u + v = 2\sqrt[3]{14}, \\ uv = \sqrt[3]{196} - 2. \end{cases}$$

Согласно обратной теореме Виета числа u и v являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - 2\sqrt[3]{14}\lambda + \left(\sqrt[3]{14}\right)^2 - 2 = 0 \iff \left(\lambda - \sqrt[3]{14}\right)^2 = 2 \iff$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda = \sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\,,\\ \lambda = \sqrt[3]{14} + \sqrt{2}\,.\end{array}\right.$$

Следовательно, множество упорядоченных пар

$$\left\{\left(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\,,\ \sqrt[3]{14} + \sqrt{2}\right),\ \left(\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}\,,\ \sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right)\right\}$$

будет множеством решений алгебраической системы, а в соответствии с выполненной подстановкой тригонометрическая система (6) равносильна совокупности двух систем:

$$\left\{\begin{array}{l}\sin x = \sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\,,\\ \sec y = \sqrt[3]{14} + \sqrt{2}\,,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\sin x = \sqrt[3]{14} + \sqrt{2}\,,\\ \sec y = \sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\,.\end{array}\right.$$

Так как

$$0 < 2 - \sqrt{2} = \sqrt[3]{8} - \sqrt{2} < \sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\,,$$

а

$$49 < 50 \iff 7 < 5\sqrt{2} \iff 14 < 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} \iff$$

$$\iff 14 < \left(1 + \sqrt{2}\right)^3 \iff \sqrt[3]{14} < 1 + \sqrt{2} \iff \sqrt[3]{14} - \sqrt{2} < 1,$$

то

$$0 < \sqrt[3]{14} - \sqrt{2} < 1.$$

Поскольку

$$0 < \sqrt[3]{14} - \sqrt{2} < 1,\ \sqrt[3]{14} + \sqrt{2} > 1,$$

то вторая система совокупности решений не имеет, а множество

$$\left\{\left((-1)^n \cdot \arcsin\left(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right) + \pi n,\ -\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}} + 2\pi m\right),\right.$$

$$\left.\left((-1)^n \cdot \arcsin\left(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right) + \pi n, \arccos\frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}} + 2\pi m\right)\right\},$$

где n и m — целые числа, является множеством решений системы (6).

Среди чисел

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},$$

условию $0 < x < \pi$ удовлетворяют

$$\arcsin\left(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right) \quad \text{и} \quad \pi - \arcsin\left(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right).$$

Среди чисел

$$y = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z},$$

условию $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ удовлетворяют

$$-\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}.$$

Множеством упорядоченных пар (x, y), являющихся решениями системы (6) и удовлетворяющих условиям $0 < x < \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$, будет множество пар чисел

$$\{(A, -B), (A, B), (\pi - A, -B), (\pi - A, B)\},$$

где $A = \arcsin\left(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right)$, $B = \arccos \dfrac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}$.

Ответ: $\{(A, -B), (A, B), (\pi - A, -B), (\pi - A, B)\}$, где

$$A = \arcsin\left(\sqrt[3]{14} - \sqrt{2}\right), \ B = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{14} + \sqrt{2}}.$$

Задача 5. Найдите решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \sin y + 2 \operatorname{ctg} x \cos y = \sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ 2 \operatorname{ctg} x \sin y - \operatorname{tg} x \cos y = \sqrt{\dfrac{5}{2}}, \end{cases} \tag{7}$$

удовлетворяющие условию $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$, $0 < y < \pi$.

Решение. Возведя в квадрат оба уравнения системы (7), получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x \sin^2 y + 4 \sin y \cos y + 4 \operatorname{ctg}^2 x \cos^2 y = \dfrac{5}{2}\,, \\ 4 \operatorname{ctg}^2 x \sin^2 y - 4 \sin y \cos y + \operatorname{tg}^2 x \cos^2 y = \dfrac{5}{2}\,, \\ \operatorname{tg} x \sin y + 2 \operatorname{ctg} x \cos y > 0, \\ 2 \operatorname{ctg} x \sin y - \operatorname{tg} x \cos y > 0. \end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнения этой системы, получаем равносильную системе (7) новую систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{ctg}^2 x = 5, \\ (\operatorname{tg} x \sin y + 2 \operatorname{ctg} x \cos y)^2 = \dfrac{5}{2}\,, \\ \operatorname{tg} x \sin y + 2 \operatorname{ctg} x \cos y > 0, \\ 2 \operatorname{ctg} x \sin y - \operatorname{tg} x \cos y > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{ctg}^2 x = 5 \iff \operatorname{tg}^4 x - 5 \operatorname{tg}^2 x + 4 = 0 \iff$$
$$\iff (\operatorname{tg} x + 2)(\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x - 2) = 0,$$

что позволяет в отдельности рассмотреть четыре случая.

Случай 1. Если $\operatorname{tg} x = -2$, то

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x = \pi - \operatorname{arctg} 2,$$

так как $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}\,; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Неравенства в системе (8) примут вид:

$$\begin{cases} 2 \sin y + \cos y < 0, \\ \sin y - 2 \cos y < 0 \end{cases} \implies 5 \sin y < 0,$$

что не возможно при $y \in (0; \pi)$.

Случай 2. Если $\operatorname{tg} x = -1$, то

$$\operatorname{ctg} x = -1 \quad \text{и} \quad x = \frac{3\pi}{4}\,,$$

так как $x \in \left(\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right)$.

Неравенства в системе (8) примут вид:

$$\begin{cases} \sin y + 2\cos y < 0, \\ 2\sin y - \cos y < 0 \end{cases} \implies 5\sin y < 0,$$

что не возможно при $y \in (0;\pi)$.

Случай 3. Если $\operatorname{tg} x = 1$, то

$$\operatorname{ctg} x = 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{5\pi}{4}\,,$$

так как $x \in \left(\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right)$.

Система (7) примет вид:

$$\begin{cases} \sin y + 2\cos y = \sqrt{\dfrac{5}{2}}\,, \\[2ex] 2\sin y - \cos y = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}\,, \\[2ex] \cos y = \dfrac{\sqrt{10}}{10}\,. \end{cases}$$

Поскольку $y \in (0;\pi)$, то из простейшего тригонометрического уравнения

$$\cos y = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

находим

$$y = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}\,.$$

С учетом того, что

$$\sin\arccos\frac{\sqrt{10}}{10} = \sqrt{1 - \cos^2\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}\,,$$

получаем решение

$$x = \frac{5\pi}{4}\,,\ \ y = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}\,.$$

С л у ч а й 4. Если $\operatorname{tg} x = 2$, то с учетом того, что $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, получаем:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x = \pi + \operatorname{arctg} 2.$$

Система (7) примет вид:

$$\begin{cases} 2\sin y + \cos y = \sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ \sin y - 2\cos y = \sqrt{\dfrac{5}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}, \\ \cos y = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}. \end{cases}$$

Поскольку $y \in (0; \pi)$, то из уравнения

$$\cos y = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

находим

$$y = \pi - \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

С учетом того, что

$$\sin\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \sin\arccos\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

получаем решение

$$x = \pi + \operatorname{arctg} 2, \ \ y = \pi - \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{5\pi}{4}, \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}\right), \left(\pi + \operatorname{arctg} 2, \ \pi - \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$.

Задача 6. Найдите решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \log_2 x \log_y 2 + 1 = 0, \\ \sin x \cos y = 1 - \cos x \sin y, \end{cases} \tag{9}$$

удовлетворяющие условию $x + y < 8$.

Решение. Уравнение

$$\log_2 x \log_y 2 + 1 = 0 \iff \log_y 2 \log_2 x = -1 \iff \log_y x = -1 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y \neq 1, \\ x = \dfrac{1}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ y \neq 1, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Уравнение

$$\sin x \cos y = 1 - \cos x \sin y \iff \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1 \iff$$

$$\iff \sin(x + y) = 1 \iff x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, необходимо найти решения системы

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

такие, что $x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1,\ x + y < 8$ при целых k.

Поскольку

$$x > 0, \ y > 0, \ x + y < 8,$$

то

$$0 < x + y < 8.$$

Тогда

$$0 < \frac{\pi}{2} + 2\pi k < 8 \iff -\frac{1}{4} < k < \frac{16 - \pi}{4\pi},$$

а значит, целое число k равно нулю или единице.

Таким образом, надо найти решения совокупности двух систем:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} xy = 1, \\ x + y = \dfrac{5\pi}{2}. \end{cases} \tag{10}$$

При этом решения каждой системы, если существуют, то удовлетворяют условиям $x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1,\ x + y < 8$.

Согласно обратной теореме Виета решениями первой системы совокупности (10) являются корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \frac{\pi}{2}\,\lambda + 1 = 0, \tag{11}$$

а решениями второй системы совокупности (10) являются корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \frac{5\pi}{2}\,\lambda + 1 = 0. \tag{12}$$

Квадратное уравнение (11) корней не имеет, так как его дискриминант $D = \dfrac{\pi^2}{4} - 4 = \dfrac{1}{4}\,(\pi^2 - 16) < 0.$

Корнями уравнения (12) являются числа

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\left(5\pi - \sqrt{25\pi^2 - 16}\right) \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}\left(5\pi + \sqrt{25\pi^2 - 16}\right).$$

Следовательно, $\{(\lambda_1, \lambda_2),\ (\lambda_2, \lambda_1)\}$ — множество решений совокупности (10), значит, и системы (9).

Ответ: $\{(\lambda_1, \lambda_2),\ (\lambda_2, \lambda_1)\}$, где $\lambda_1 = \dfrac{1}{4}\left(5\pi - \sqrt{25\pi^2 - 16}\right)$,
$\lambda_2 = \dfrac{1}{4}\left(5\pi + \sqrt{25\pi^2 - 16}\right)$.

Задача 7. Найдите решения системы уравнений:

$$\begin{cases} y\sin x = \log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\[2ex] \left(6y^2 + 2y\right)\cdot\left(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}\right) = 25y^2 + 6y + 1, \end{cases} \tag{13}$$

удовлетворяющие условию $|y| \leqslant 1$.

Решение. Для краткости обозначим

$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = a.$$

Тогда второе уравнение системы (13) перепишем в виде

$$(25 - 6a)y^2 + (6 - 2a)y + 1 = 0. \tag{14}$$

Пусть $25-6a=0$.

Из уравнения (14) находим $y=\dfrac{3}{7}$.

На основании первого уравнения системы (13) устанавливаем, что

$$-\frac{3}{7}\leqslant y\sin x=\log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right|=\log_2\frac{3|\sin x|}{16}\leqslant\log_2\frac{3}{16}< -2.$$

Получили противоречие:

$$-\frac{3}{7}< -2,$$

которое означает, что для любого решения системы (13) равенство

$$25-6a=0$$

выполняться не может.

Корнями квадратного уравнения (14) относительно y являются

$$y_1=-\frac{3-a+\sqrt{a^2-16}}{25-6a},\ \ y_2=-\frac{3-a-\sqrt{a^2-16}}{25-6a}.$$

Поскольку

$$a^2-16=\left(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\right)^2-16=\left(4^{\sin^2 x}-4^{\cos^2 x}\right)^2,$$

то

$$y_1=\frac{2\cdot 4^{\sin^2 x}-3}{25-6\left(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\right)},\ \ y_2=\frac{2\cdot 4^{\cos^2 x}-3}{25-6\left(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\right)}.$$

Таким образом, система (13) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y\sin x=\log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\[2ex] y=\dfrac{2\cdot 4^{\sin^2 x}-3}{25-6\left(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}\right)}; \end{cases} \qquad (15)$$

$$\left\{\begin{aligned} &y\sin x = \log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ &y = \frac{2\cdot 4^{\cos^2 x} - 3}{25 - 6\left(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}\right)}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Решим систему (15).
В силу второго уравнения системы (15) частное

$$\frac{1+3y}{y} = 3 + \frac{1}{y} = 3 + \frac{25 - 6\left(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}\right)}{2\cdot 4^{\sin^2 x} - 3} =$$

$$= \frac{16 - 6\cdot 4^{\cos^2 x}}{2\cdot 4^{\sin^2 x} - 3} = \frac{2\cdot 4^{\cos^2 x}\left(2\cdot 4^{\sin^2 x} - 3\right)}{2\cdot 4^{\sin^2 x} - 3} = 2\cdot 4^{\cos^2 x}.$$

При этом было использовано то, что для решений системы (15) выполняется условие $y \neq 0$, так как иначе в первом уравнении не будет иметь смысла выражение $\log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right|$.

Подставляя $2\cdot 4^{\cos^2 x}$ вместо $\frac{1+3y}{y}$ в правую часть первого уравнения системы (15), находим:

$$\log_2\left|\frac{y\sin x}{1+3y}\right| = \log_2|\sin x| - \log_2\left|\frac{1+3y}{y}\right| =$$

$$= \log_2|\sin x| - \log_2\left(2\cdot 4^{\cos^2 x}\right) = \log_2|\sin x| - 1 - 2\cos^2 x.$$

Используя условие $|y| \leqslant 1$, первое уравнение системы (15), а также очевидные неравенства $\log_2|\sin x| \leqslant 0$ и $\cos^2 x \geqslant 0$, получаем

$$-1 \leqslant y\sin x = \log_2|\sin x| - 1 - 2\cos^2 x \leqslant -1.$$

Поэтому

$$\begin{cases} y\sin x = -1, \\ \log_2|\sin x| = 0, \\ \cos x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\sin x = -1, \\ |\sin x| = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = -1, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 1, \\ y = -1, \end{cases} \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = -1, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Подставляя

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ y = 1, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

во второе уравнение системы (15), получаем неверное равенство

$$1 = -1.$$

Подставляя

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ y = -1, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

в оба уравнения системы (15), убеждаемся, что эти числа являются решениями.

Итак, множеством решений системы (15) является множество упорядоченных пар чисел $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ -1\right)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Решим систему (16).

Используя второе уравнение этой системы, подобно предыдущему, устанавливаем, что

$$\frac{1+3y}{y} = 2 \cdot 4^{\sin^2 x}.$$

Подставляя $2 \cdot 4^{\sin^2 x}$ вместо $\dfrac{1+3y}{y}$ в правую часть первого уравнения системы (16), так же как и ранее, находим, что

$$y\sin x = \log_2|\sin x| - 1 - 2\sin^2 x.$$

Используя условие $|y| \leqslant 1$, неравенства

$$\log_2|\sin x| \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \sin^2 x \geqslant 0,$$

как и ранее, получаем, что

$$-1 \leqslant y\sin x = \log_2|\sin x| - 1 - 2\sin^2 x \leqslant -1.$$

Отсюда следует, что для решений системы (16) должны выполняться следующие условия:

$$y\sin x = -1, \ \log_2|\sin x| = 0, \ \sin x = 0,$$

что невозможно.

Значит, система (16) решений не имеет.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ -1\right)\right\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{z^2}, \\ \cos x \cos y = -\dfrac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y) = \dfrac{2(x+y)}{(a-\pi)z} \end{cases} \tag{17}$$

имеет одно решение, удовлетворяющее условиям

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \ z > 0.$$

Решение. Перемножив почленно первые два уравнения системы (17), получим:

$$-\sin x\cos x\sin y\cos y = \frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2 z^2}.$$

Отсюда с учетом третьего уравнения системы (17) имеем

$$-4\sin x\cos x\sin y\cos y = \sin^2(x-y) \iff -4\sin x\cos x\sin y\cos y =$$

$$= \sin^2 x\cos^2 y - 2\sin x\cos x\sin y\cos y + \cos^2 x\sin^2 y \iff$$

$$\iff (\sin x\cos y + \cos x\sin y)^2 = 0 \iff \sin^2(x+y) = 0 \iff$$

$$\iff \sin(x+y) = 0 \iff x + y = \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \text{а} \quad \sin x\sin y = \frac{1}{z^2}\,,$$

то

$$\sin y > 0,\ \ \sin x > 0.$$

То, что $x = -y + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},$ означает:

$$\sin x = \sin(\pi n - y) = -\sin(y - \pi n) = (-1)^{n+1}\cdot\sin y.$$

Но $\sin y > 0,\ \sin x > 0.$
Следовательно, $(-1)^{n+1} = 1,$ т.е.

$$n = 2m + 1,\ m \in \mathbb{Z}.$$

В итоге установлено:

$$\sin x = \sin y > 0,\ \ x = -y + \pi(2m+1),\ m \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда и из первого уравнения системы (17) получаем:

$$\sin x = \sin y = \frac{1}{z}\,.$$

Кроме того,

$$\cos x = \cos(-y + 2\pi m + \pi) = -\cos y.$$

Поэтому

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y = \frac{1}{z}\,(\cos y - \cos x) = \frac{2}{z}\,\cos y.$$

При этом из третьего уравнения системы (17) находим:

$$\frac{2}{z}\cos y = \frac{2(x+y)}{(a-\pi)z} \iff \cos y = \frac{x+y}{a-\pi} \quad \text{при} \quad z > 0.$$

Таким образом, надо найти все значения параметра a, когда при целых m система

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{x+y}{a-\pi}, \\ x = \pi(2m+1) - y, \\ 0 < y \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos y = \dfrac{\pi(2m+1)}{a-\pi}, \\ x = \pi(2m+1) - y, \\ 0 < y \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы двойное неравенство

$$0 \leqslant \frac{\pi(2m+1)}{a-\pi} < 1$$

выполнялось при единственном целом m.

Если $a - \pi > 0$, то

$$0 \leqslant \frac{\pi(2m+1)}{a-\pi} < 1 \Longrightarrow 0 \leqslant 2\pi m + \pi < a - \pi \iff -\frac{1}{2} \leqslant m < \frac{a}{2\pi} - 1.$$

На этом промежутке целое m принимает единственное значение $m = 0$ тогда и только тогда, когда

$$0 < \frac{a}{2\pi} - 1 \leqslant 1 \iff 2\pi < a \leqslant 4\pi.$$

Если $a - \pi < 0$, то

$$0 \leqslant \frac{\pi(2m+1)}{a-\pi} < 1 \Longrightarrow a - \pi < 2\pi m + \pi \leqslant 0 \iff \frac{a}{2\pi} - 1 < m \leqslant -\frac{1}{2}.$$

На этом промежутке целое m принимает единственное значение $m = -1$ тогда и только тогда, когда

$$-2 \leqslant \frac{a}{2\pi} - 1 < -1 \iff -2\pi \leqslant a < 0.$$

Ответ: любое $a \in [-2\pi; 0) \cup (2\pi; 4\pi]$.

§ 5. Нестандартные решения систем, содержащих тригонометрические функции

Задача 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. При любых действительных x и y справедливы неравенства

$$\cos 4x \geqslant -1 \quad \text{и} \quad \sin 2y \geqslant -1.$$

Поэтому первое уравнение системы (1) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \sin 2y = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Для нахождения решений системы (1) во второе уравнение этой системы подставим найденные значения x и y:

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k - \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = 2\pi \iff k = 2(n+2).$$

Тогда решениями системы (1) будут

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\big(2(n+2)\big) = \frac{3\pi}{4} + \pi(n+1), \ \ y = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi(n+1), \ -\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right)\right\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$

Задача 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 2\sqrt{2}\cos^3 y, \\ \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}\sin^3 y. \end{cases} \tag{2}$$

Решение. По формуле приведения

$$\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)=\operatorname{ctg}\Big(\frac{\pi}{4}+x\Big),$$

значит, система (2) равносильна системе

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\Big(\dfrac{\pi}{4}+x\Big)=2\sqrt{2}\,\cos^3 y,\\ \operatorname{ctg}\Big(\dfrac{\pi}{4}+x\Big)=2\sqrt{2}\,\sin^3 y.\end{cases}\tag{3}$$

Перемножив уравнения системы (3), получим, что

$$1=8\cos^3 y\sin^3 y\iff 1=(2\cos y\sin y)^3\iff 1=\sin^3 2y\iff$$

$$\iff\sin 2y=1\iff y=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку

$$\cos\Big(\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)=(-1)^n\cdot\cos\frac{\pi}{4}=(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$\sin\Big(\frac{\pi}{4}+\pi n\Big)=(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{4}=(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

то при

$$y=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}$$

из системы (3) получаем систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\Big(\dfrac{\pi}{4}+x\Big)=(-1)^n,\\ \operatorname{ctg}\Big(\dfrac{\pi}{4}+x\Big)=(-1)^n.\end{cases}$$

Отсюда при $n=2l$ имеем:

$$\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}+x\Big)=1\iff x=\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}.$$

При $n=2l+1$ получаем, что

$$\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}+x\Big) = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда множество решений системы (2) будет состоять из упорядоченных пар чисел:

$$\Big\{\Big(\pi k, \frac{\pi}{4}+2\pi l\Big), \Big(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi(2l+1)\Big)\Big\},\ \forall k, l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\Big\{\Big(\pi k, \frac{\pi}{4}+2\pi l\Big), \Big(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi(2l+1)\Big)\Big\},\ \forall k, l \in \mathbb{Z}.$

Задача 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin y}\cdot \sin 2x = 0, \\ \cos x + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y. \end{cases} \tag{4}$$

Решение. Произведение двух выражений равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, при условии, что произведение имеет смысл.

Поэтому система (4) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos x + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin y \geqslant 0, \\ \sin 2x = 0, \\ \cos x + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y. \end{cases} \tag{5}$$

Первая система совокупности (5) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos x + 1 - \sin^2 y = 0{,}25 + \sin y \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y = 0, \\ \cos x = -0{,}75 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = \pi k, \\ x = \pm\arccos(-0{,}75) + 2\pi n \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = \pi k, \\ x = \pm(\pi - \arccos 0{,}75) + 2\pi n \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\arccos 0{,}75 + \pi(2n+1), \\ y = \pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \arccos 0{,}75 + \pi(2n-1), \\ y = \pi k,\ \forall n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Во второй системе совокупности (5) уравнение

$$\sin 2x = 0 \iff 2x = \pi n \iff x = \frac{\pi n}{2}\,, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Разобъем множество чисел

$$\left\{\frac{\pi n}{2}\right\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

на три подмножества: множество

$$\left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right\}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

чисел x, для которых $\cos x = 0$; множество

$$\{x\colon x = 2\pi k\}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

чисел x, для которых $\cos x = 1$, а также множество

$$\{x\colon x = \pi(2k+1)\}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

чисел x, для которых $\cos x = -1$.

При

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

вторую систему совокупности (5) приводим к системе

$$\begin{cases} \sin y \geqslant 0, \\ \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y \geqslant 0, \\ \sin^2 y + \sin y - 0{,}75 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin y \geqslant 0, \\ (\sin y + 1{,}5)(\sin y - 0{,}5) = 0 \end{cases} \iff \sin y = 0{,}5 \iff$$

$$\iff y = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, решениями системы (4) будут

$$\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \ (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n\right), \ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$$

При

$$x = 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

вторую систему совокупности (5) приводим к системе

$$\begin{cases} \sin y \geqslant 0, \\ 1 + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y \geqslant 0, \\ \sin^2 y + \sin y - \dfrac{7}{4} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin y \geqslant 0, \\ \left(\sin y + \dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin y - \dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}\right) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \sin y = \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \iff y = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{2} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда решениями системы (4) будут

$$\left(2\pi k,\ (-1)^n \cdot \arcsin\frac{2\sqrt{2}-1}{2} + \pi n\right),\ \forall k, n \in \mathbb{Z}.$$

При

$$x = (2k+1)\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

вторую систему совокупности (5) приводим к системе

$$\begin{cases} \sin y \geqslant 0, \\ -1 + \cos^2 y = 0{,}25 + \sin y \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y \geqslant 0, \\ \sin^2 y + \sin y + 0{,}25 = 0, \end{cases}$$

у которой нет решений, так как

$$\sin^2 y + \sin y + 0{,}25 > 0 \quad \text{при} \quad \sin y \geqslant 0.$$

Ответ: $\Big\{\left(-\arccos\dfrac{3}{4} + \pi(2k+1),\ \pi n\right),\ \left(\arccos\dfrac{3}{4} + \pi(2k-1),\ \pi n\right),$
$\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right), \left(2\pi k,\ (-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2} + \pi n\right)\Big\},$
$\forall k, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\operatorname{tg}3x = 3\operatorname{tg}2y, \\ 2\sin x\cos(x-y) = \sin y. \end{cases} \tag{6}$$

Решение. С п о с о б 1. Уравнение

$$2\sin x\cos(x-y) = \sin y \Leftrightarrow 2\sin x\cos x\cos y + 2\sin^2 x\sin y - \sin y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cos y + \sin y(2\sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x\cos y - \cos 2x\sin y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sin(2x-y) = 0 \Longleftrightarrow 2x - y = \pi k \Longleftrightarrow y = 2x - \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Подставим

$$y = 2x - \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

в первое уравнение системы (6):

$$4\operatorname{tg}3x = 3\operatorname{tg}(4x - 2\pi k) \Longleftrightarrow 4(\operatorname{tg}4x - \operatorname{tg}3x) = \operatorname{tg}4x \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4\sin x}{\cos 4x\cos 3x} - \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = 0 \Longleftrightarrow \frac{4\sin x - \sin 4x\cos 3x}{\cos 4x\cos 3x} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4\sin x - 4\sin x\cos x\cos 2x\cos 3x}{\cos 4x\cos 3x} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sin x(1 - \cos x\cos 2x\cos 3x)}{\cos 4x\cos 3x} = 0,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку из уравнения

$$1 - \cos x\cos 2x\cos 3x = 0$$

следует, что

$$\begin{cases} |\cos x| = 1, \\ |\cos 2x| = 1, \\ |\cos 3x| = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow |\cos x| = 1 \Longleftrightarrow x = \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

а

$$1 - \cos \pi n\cos 2\pi n\cos 3\pi n = 1 - (-1)^n \cdot 1 \cdot (-1)^n = 1 - 1 = 0,$$

то

$$1 - \cos x \cos 2x \cos 3x = 0 \iff x = \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того,

$$\sin \pi n = 0,\ \cos 4\pi n = 1,\ \cos 3\pi n = (-1)^n.$$

Поэтому

$$\frac{\sin x(1 - \cos x \cos 2x \cos 3x)}{\cos 4x \cos 3x} = 0 \iff x = \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

и система (6) равносильна системе

$$\begin{cases} x = \pi n, \\ y = 2\pi n + \pi k \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, \\ y = \pi(2n + k) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, \\ y = \pi m, \end{cases}$$

где k, m и n — целые числа.

С п о с о б 2. Уравнение (см. способ 1)

$$2 \sin x \cos(x - y) = \sin y \iff y = 2x + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Подставим

$$y = 2x + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

в первое уравнение системы (6):

$$4 \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg}(4x + 2\pi k) \iff \frac{4 \sin 3x \cos 4x - 3 \cos 3x \sin 4x}{\cos 4x \cos 3x} = 0 \iff$$

$$\iff \sin 3x \cos 4x - 3(\sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x) = 0 \iff$$

$$\iff \sin 3x \cos 4x - 3 \sin x = 0 \iff \frac{1}{2}(\sin 7x - \sin x) - 3 \sin x = 0 \iff$$

$$\iff 7 \sin x = \sin 7x \iff x = \pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

При этом было использовано неравенство (доказывается методом математической индукции)

$$\sin nx \leqslant n|\sin x|,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},$$

в котором равенство достигается лишь при $x = \pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z},$ что позволило решить уравнение $7 \sin x = \sin 7x$.

Находим

$$y = \pi s,\ \forall s \in \mathbb{Z}$$

и составляем множество решений системы (6):

$$\{(\pi n, \pi m)\},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{(\pi n, \pi m)\},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x, \\ 2 \sin y \sin(x + y) = \cos x. \end{cases} \tag{7}$$

Решение. Уравнение

$$2 \sin y \sin(x + y) = \cos x \iff \cos x - \cos(x + 2y) = \cos x \iff$$

$$\iff \cos(x + 2y) = 0 \iff 2y = \frac{\pi}{2} - x + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \sin 2y = \sin 2x \iff \sin 2y = 2 \sin x \cos x - \frac{\cos x}{\sin x} \iff$$

$$\iff \sin 2y = \frac{\cos x}{\sin x}\,(2 \sin^2 x - 1) \iff \sin 2y = -\frac{\cos x \cos 2x}{\sin x}\,.$$

Система (7) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x \cos 2x}{\sin x} = -\sin 2y\,, \\ 2y = \dfrac{\pi}{2} - x + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим случаи, когда $k = 2p$ и $k = 2p + 1,\ \forall p \in \mathbb{Z}$.
Пусть

$$k = 2p,\ \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$2y = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi p,\ \forall p \in \mathbb{Z},$$

а первое уравнение системы (8) приведем к виду

$$\frac{\cos x \cos 2x}{\sin x} = -\sin\Big(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi p\Big) \iff \frac{\cos x \cos 2x}{\sin x} = -\cos x \iff$$

$$\iff \frac{\cos x(\cos 2x + \sin x)}{\sin x} = 0,\ \forall p \in \mathbb{Z}. \qquad (9)$$

Пусть

$$k = 2p + 1,\ \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$2y = \frac{3\pi}{2} - x + 2\pi p,\ \forall p \in \mathbb{Z},$$

а первое уравнение системы (8) приведем к виду

$$\frac{\cos x \cos 2x}{\sin x} = -\sin\Big(\frac{3\pi}{2} - x + 2\pi p\Big) \iff \frac{\cos x \cos 2x}{\sin x} = \cos x \iff$$

$$\iff \frac{\cos x(\cos 2x - \sin x)}{\sin x} = 0,\ \forall p \in \mathbb{Z}. \qquad (10)$$

Если $\sin x = 0$, то

$$\sin x \pm \cos 2x = \sin x \pm (1 - 2\sin^2 x) \neq 0 \quad \text{и} \quad \cos x \neq 0.$$

Поэтому каждое из уравнений (9) и (10) равносильно уравнению, полученному из него умножением на $\sin x$.

Следовательно, система (8) равносильна совокупности:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} \cos x(\sin x + \cos 2x) = 0, \\ 2y = \dfrac{\pi}{2} - x + 2\pi p, \end{cases} \\ &\begin{cases} \cos x(\sin x - \cos 2x) = 0, \\ 2y = \dfrac{\pi}{2} - x + \pi(2p + 1),\ \forall p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}\right. \qquad (11)$$

Значения x, при которых $\cos x = 0$, удовлетворяют обеим системам совокупности (11). Поэтому совокупность (11) равносильна совокупности трех систем:

$$\begin{cases} \cos x = 0\,, \\ 2y = \dfrac{\pi}{2} - x + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos 2x = 0\,, \\ 2y = \dfrac{\pi}{2} - x + 2\pi p,\ \forall p \in \mathbb{Z}; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \sin x - \cos 2x = 0\,, \\ 2y = \dfrac{\pi}{2} - x + \pi(2p+1),\ \forall p \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{14}$$

Решениями уравнения

$$\cos x = 0$$

являются

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Подставляя найденные значения x во второе уравнение системы (12), получаем, что

$$y = \frac{\pi}{2}\,(k-n),\ \forall n, k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда решениями системы (12) будут упорядоченные пары

$$\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2}\,(k-n)\Big).$$

Поскольку k — любое целое число, то $k-n$ можно заменить на m, и множеством решений системы (12) будет

$$\Big\{\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2}\,m\Big)\Big\},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

Уравнение

$$\sin x + \cos 2x = 0 \iff \cos 2x = \cos\Big(\frac{\pi}{2} + x\Big) \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &2x = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n, \\ &2x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\pi n \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ &x = \frac{\pi}{6}\,(4n - 1),\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Если

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

то из второго уравнения системы (13) находим, что

$$y = \pi(p - n),\ \forall n, p \in \mathbb{Z}.$$

Значит, множество упорядоченных пар

$$\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi(p - n)\right)\right\},\ \forall n, p \in \mathbb{Z}$$

является множеством решений системы (13).

Заметим, что это множество решений системы (13) является подмножеством множества решений (15) системы (12).

Если

$$x = \frac{\pi}{6}\,(4n - 1),\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

то из второго уравнения системы (13) находим, что

$$y = \frac{\pi}{3}\,(3p - n + 1),\ \forall n, p \in \mathbb{Z}.$$

Значит, множество

$$\left\{\left(\frac{\pi}{6}\,(4n - 1)\,, \frac{\pi}{3}\,(3p - n + 1)\right)\right\},\ \forall n, p \in \mathbb{Z}$$

будет множеством решений системы (13).

Уравнение

$$\sin x - \cos 2x = 0 \ \Longleftrightarrow\ \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &2x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n, \\ &2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{6}\,(4n + 1), \\ &x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Если

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

то из второго уравнения системы (14) находим, что

$$y = \pi(p - n + 1),\ \forall n, p \in \mathbb{Z}.$$

Значит, множество упорядоченных пар

$$\Big\{\Big(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi(p - n + 1)\Big)\Big\},\ \forall n, p \in \mathbb{Z}$$

является множеством решений системы (14).

Заметим, что это множество решений системы (14) является подмножеством множества решений (15) системы (12).

Если

$$x = \frac{\pi}{6}\,(4n + 1),\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

то из второго уравнения системы (14) находим, что

$$y = \frac{\pi}{3}\,(3p - n + 2),\ \forall n, p \in \mathbb{Z}.$$

Значит, множество

$$\Big\{\Big(\frac{\pi}{6}\,(4n + 1)\,, \frac{\pi}{3}\,(3p - n + 2)\Big)\Big\},\ \forall n, p \in \mathbb{Z}$$

будет множеством решений системы (14).

Ответ: $\Big\{\Big(\frac{\pi}{2}\,(2n + 1)\,, \frac{\pi}{2}\,p\Big)\,, \Big(\frac{\pi}{6}\,(4n - 1)\,, \frac{\pi}{3}\,(3p - n + 1)\Big)\,,$
$\Big(\frac{\pi}{6}\,(4n + 1)\,, \frac{\pi}{3}\,(3p - n + 2)\Big)\Big\},\ \forall n, p \in \mathbb{Z}.$

Задача 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \Big(\sqrt{3}\,\cos\dfrac{\pi x}{4} + \sin\dfrac{\pi(x - 2y)}{12}\Big)\Big(\sqrt{11 - x^2 - y^2 - 4x - 2y} - 6\Big) = 0, \\ \dfrac{1}{2} + 2\sin\dfrac{\pi x}{12}\,\cos\dfrac{\pi y}{6} = 2\cos\dfrac{\pi x}{12}\,\sin\dfrac{\pi y}{6} + \sin^2\dfrac{\pi x}{8}\,. \end{cases} \tag{16}$$

Решение. Поскольку

$$11 - x^2 - y^2 - 4x - 2y = -(x^2 + 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) + 16 =$$
$$= 16 - (x+2)^2 - (y+1)^2 \leqslant 16,\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

то

$$\sqrt{11 - x^2 - y^2 - 4x - 2y} - 6 \leqslant 4 - 6 < 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

и система (16) равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 16, \\ \sqrt{3}\,\cos\dfrac{\pi x}{4} + \sin\dfrac{\pi(x-2y)}{12} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\Big(1 - 2\sin^2\dfrac{\pi x}{8}\Big) + 2\Big(\sin\dfrac{\pi x}{12}\,\cos\dfrac{\pi y}{6} - \cos\dfrac{\pi x}{12}\,\sin\dfrac{\pi y}{6}\Big) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 16, \\ \sqrt{3}\,\cos\dfrac{\pi x}{4} + \sin\dfrac{\pi(x-2y)}{12} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi x}{4} + 2\sin\dfrac{\pi(x-2y)}{12} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 16, \\ \cos\dfrac{\pi x}{4} = 0, \\ \sin\dfrac{\pi(x-2y)}{12} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+2)^2 + (y+1)^2 \leqslant 16, \\ x = 2 + 4m, \\ y = 1 + 2m - 6n \end{cases} \iff$$

$$\iff 5(m+1)^2 - 6n(m+1) + 9n^2 - 4 \leqslant 0.$$

Полученное квадратичное неравенство (относительно $m+1$) возможно, лишь когда дискриминант $D \geqslant 0$, т.е.

$$-144n^2 + 80 \geqslant 0 \iff n^2 \leqslant \frac{5}{9} \implies n^2 < 1 \implies n = 0,\ \text{ибо}\ n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, решениями системы (16) будут $x = -2,\ y = -1$.
Ответ: $\{(-2,\ -1)\}$.

Задача 7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{x}{2} + \sin y\right) = y - \dfrac{\pi}{3}\,, \\ x^2 + 2x\sin y + 3\cos y = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Решение. Система (17) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin\arcsin\left(\dfrac{x}{2} + \sin y\right) = \sin\left(y - \dfrac{\pi}{3}\right), \\ -1 \leqslant \dfrac{x}{2} + \sin y \leqslant 1, \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant y - \dfrac{\pi}{3} \leqslant \dfrac{\pi}{2}\,, \\ x^2 + 2x\sin y + 3\cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sin y - \sqrt{3}\,\cos y, \\ -2 \leqslant x + 2\sin y \leqslant 2, \\ -\dfrac{\pi}{6} \leqslant y \leqslant \dfrac{5\pi}{6}\,, \\ 4\cos^2 y + 3\cos y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sin y - \sqrt{3}\,\cos y, \\ -2 \leqslant \sin y - \sqrt{3}\,\cos y \leqslant 2, \\ -\dfrac{\pi}{6} \leqslant y \leqslant \dfrac{5\pi}{6}\,, \\ \left(\cos y + 1\right)\left(\cos y - \dfrac{1}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ x = -\sin y - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,, \\ \dfrac{\sqrt{3} - 8}{4} \leqslant \sin y \leqslant \dfrac{\sqrt{3} + 8}{4}\,, \\ -\dfrac{\pi}{6} \leqslant y \leqslant \dfrac{5\pi}{6}\,, \end{cases}$$

так как $\cos y \neq -1$ при $-\dfrac{\pi}{6} \leqslant y \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$.

Поскольку

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} > \cos y = \frac{1}{4}\,,$$

то

$$\frac{\pi}{3} < \arccos\frac{1}{4} < \frac{\pi}{2}\,,$$

значит,

$$-\frac{\pi}{2} < -\arccos\frac{1}{4} < -\frac{\pi}{3},$$

и система

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{1}{4}, \\ -\dfrac{\pi}{6} \leqslant y \leqslant \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \iff y = \arccos\frac{1}{4}.$$

Тогда

$$\sin y = \sin\arccos\frac{1}{4} = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\sqrt{3}-8}{4} < \frac{\sqrt{4}-8}{4} = -\frac{3}{2} < \sin y < \frac{9}{4} = \frac{\sqrt{1}+8}{4} < \frac{\sqrt{3}+8}{4},$$

находим решение:

$$x = -\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}\,(1+\sqrt{5}\,)}{4}, \quad y = \arccos\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left\{\left(-\dfrac{\sqrt{3}\,(1+\sqrt{5}\,)}{4}, \arccos\dfrac{1}{4}\right)\right\}$.

Задача 8. Найдите $\operatorname{tg} x$, если

$$\begin{cases} y\sin x + \cos x = 2, \\ -4\sin x + 2y\cos x = -y. \end{cases} \tag{18}$$

Решение. Решая систему (18) как линейную относительно переменных $\sin x$ и $\cos x$, получим

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{5y}{4+2y^2}, \\ \cos x = \dfrac{8-y^2}{4+2y^2}. \end{cases} \tag{19}$$

Для нахождения y воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\frac{(5y)^2}{(4+2y^2)^2} + \frac{(8-y^2)^2}{(4+2y^2)^2} = 1 \iff 25y^2 + (8-y^2)^2 = (4+2y^2)^2 \iff$$

$$\iff \left[\begin{aligned} & y^2 = 3, \\ & y^2 = -\frac{32}{6} \end{aligned}\right. \iff y^2 = 3 \iff \left[\begin{aligned} & y = -\sqrt{3}, \\ & y = \sqrt{3}. \end{aligned}\right.$$

Используя систему (19), находим

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{5y}{8-y^2} = \pm\sqrt{3}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{3}$.

Задача 9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1, \\ \cos x + \cos y + \cos z = 1, \\ x + y + z = \pi. \end{cases} \tag{20}$$

Решение. Первое уравнение системы (20) равносильно уравнению

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2y}{2} + \cos^2 z = 1 \iff \cos 2x + \cos 2y + 2\cos^2 z = 0.$$

С учетом третьего уравнения системы (20) получаем

$$\cos 2x + \cos 2y + 2\cos^2\bigl(\pi - (x+y)\bigr) = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos(x+y)\bigl(\cos(x-y) + \cos(x+y)\bigr) = 0 \iff$$

$$\iff 4\cos(x+y)\cos x \cos y = 0 \iff 4\cos(\pi - z)\cos x\cos y = 0 \iff$$

$$\iff -4\cos x\cos y\cos z = 0.$$

Рассмотрим возможные случаи.

Если $\cos x = 0$, то из первых двух уравнений системы (20) имеем

$$\begin{cases} \cos^2 y + \cos^2 z = 1, \\ \cos y + \cos z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos z = 1 - \cos y, \\ \cos^2 y + (1 - \cos y)^2 = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos z = 1 - \cos y, \\ 2\cos y(\cos y - 1) = 0 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos y = 0, \\ \cos z = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos y = 1, \\ \cos z = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Аналогично рассмотрев случаи $\cos y = 0$ и $\cos z = 0$, получаем, что система (20) равносильна совокупности трех систем.

Первая система

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos y = 0, \\ \cos z = 1, \\ x + y + z = \pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ z = 2\pi m, \\ x + y + z = \pi, \end{cases}$$

т.е.

$$x = \frac{\pi}{2} - \pi(2m + n), \;\; y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \;\; z = 2\pi m, \; \forall m, n \in \mathbb{Z},$$

так как

$$\frac{\pi}{2} + \pi k + \frac{\pi}{2} + \pi n + 2\pi m = \pi \quad \text{при} \quad k = -(2m + n).$$

Вторая система

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos y = 1, \\ \cos z = 0, \\ x + y + z = \pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ y = 2\pi n, \\ z = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, \\ x + y + z = \pi, \end{cases}$$

т.е.

$$x = \frac{\pi}{2} - \pi(2n+m), \;\; y = 2\pi n, \;\; z = \frac{\pi}{2} + \pi m, \; \forall m, n \in \mathbb{Z},$$

так как

$$\frac{\pi}{2} + \pi k + 2\pi n + \frac{\pi}{2} + \pi m = \pi \quad \text{при} \;\; k = -(2n+m).$$

Третья система

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos y = 0, \\ \cos z = 0, \\ x + y + z = \pi \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2\pi k, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ z = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, \\ x + y + z = \pi, \end{cases}$$

т.е.

$$x = 2\pi k, \;\; y = \frac{\pi}{2} - \pi(2k+m), \;\; z = \frac{\pi}{2} + \pi m, \; \forall k, m \in \mathbb{Z},$$

так как

$$2\pi k + \frac{\pi}{2} + \pi n + \frac{\pi}{2} + \pi m = \pi \quad \text{при} \quad n = -(2k+m).$$

Ответ: $\Big\{\Big(\dfrac{\pi}{2} - \pi(2m+n),\; \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\; 2\pi m\Big),\; \Big(\dfrac{\pi}{2} - \pi(2n+m),$ $2\pi n,\; \dfrac{\pi}{2} + \pi m\Big),\; \Big(2\pi k,\; \dfrac{\pi}{2} - \pi(2k+m),\; \dfrac{\pi}{2} + \pi m\Big)\Big\},\; \forall k, n, m \in \mathbb{Z}.$

Задача 10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\cos x = 3\operatorname{tg} y, \\ 2\cos y = 3\operatorname{tg} z, \\ 2\cos z = 3\operatorname{tg} x. \end{cases} \tag{21}$$

Решение. Из уравнения $2\cos y = 3\operatorname{tg} z$ находим

$$\cos y = \frac{3}{2}\operatorname{tg} z.$$

Из уравнения $2\cos x = 3\operatorname{tg} y$ находим

$$2\cos x = \frac{3\sin y}{\cos y}\,,$$

и получаем, что

$$\sin y = \frac{2}{3}\,\cos x\cos y.$$

Тогда $\sin y = \cos x \operatorname{tg} z$.

Теперь найдем сумму:

$$\cos^2 y + \sin^2 y = \frac{9}{4}\,\operatorname{tg}^2 z + \cos^2 x \operatorname{tg}^2 z = \frac{9}{4}\,\operatorname{tg}^2 z\Big(1 + \frac{4}{9}\,\cos^2 x\Big) =$$

$$= \frac{9}{4}\cdot\frac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z}\cdot\Big(1+\frac{4}{9}\,\cos^2 x\Big).$$

Из уравнения $2\cos z = 3\operatorname{tg} x$ находим

$$\cos z = \frac{3}{2}\,\operatorname{tg} x.$$

Тогда

$$\cos^2 y + \sin^2 y = \frac{9\Big(1-\frac{9}{4}\,\operatorname{tg}^2 x\Big)}{4\cdot\frac{9}{4}\,\operatorname{tg}^2 x}\cdot\Big(1+\frac{4}{9}\,\cos^2 x\Big).$$

В силу основного тригонометрического тождества получаем, что

$$\frac{(4-9\operatorname{tg}^2 x)(9+4\cos^2 x)}{36\operatorname{tg}^2 x} = 1 \iff$$

$$\iff 36 + 16\cos^2 x - 81\operatorname{tg}^2 x - 36\sin^2 x = 36\operatorname{tg}^2 x \iff$$

$$\iff 52\cos^2 x = 117\operatorname{tg}^2 x \iff 4\cos^2 x = \frac{9(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} \iff$$

$$\iff 4\cos^4 x + 9\cos^2 x - 9 = 0 \iff (4\cos^2 x - 3)(\cos^2 x + 3) = 0 \iff$$

$$\iff 4\cos^2 x - 3 = 0 \iff \cos^2 x = \frac{3}{4} \iff$$

$$\iff \cos 2x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi l,\ \forall l\in\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Пусть $l = 2k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то из третьего уравнения системы (21) получаем

$$\cos z = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff z = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Если

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то из третьего уравнения системы (21) получаем

$$\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff z = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi m, \ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

При

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

из первого уравнения системы (21) получаем

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3} \iff y = \frac{\pi}{6} + \pi p, \ \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что из второго уравнения системы (21) следует, что $\cos y$ и $\operatorname{tg} z$ должны быть одного знака.

Поэтому для

$$z = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \ \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad z = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, \ \forall m \in \mathbb{Z}$$

имеем

$$p = 2n + 1,$$

следовательно,

$$y = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z};$$

а для

$$z = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m \quad \text{и} \quad z = \frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z},$$

имеем

$$p = 2n,$$

следовательно,

$$y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

В итоге получаем множество решений системы (21): $\Big\{\Big(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi m\Big), \Big(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m\Big), \Big(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi m\Big), \Big(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi m\Big)\Big\}$, $\forall k, n, m \in \mathbb{Z}$.

С л у ч а й 2. Пусть $l = 2k+1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

т.е.

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Если

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то из третьего уравнения системы (21) получаем

$$\cos z = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff z = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

При

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

из первого уравнения системы (21) получаем

$$\operatorname{tg} y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \iff y = -\frac{\pi}{6} + \pi p,\ \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\cos y$ и $\operatorname{tg} z$ должны быть одного знака, то для

$$z = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z},$$

неизвестная

$$y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z};$$

а для

$$z = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z},$$

неизвестная

$$y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\Big\{\Big(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi m\Big), \Big(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m\Big)\Big\}$, $\forall k, n, m \in \mathbb{Z}$, — множество решений системы (21).

Аналогично при

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

получаем множество решений системы (21): $\Big\{\Big(\frac{7\pi}{6}+2\pi k, -\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi m\Big), \Big(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi m\Big)\Big\}$, $\forall k, n, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\Big\{\Big(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi m\Big), \Big(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m\Big), \Big(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi m\Big), \Big(\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,$

$-\dfrac{\pi}{6}+2\pi m\Big),\Big(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m\Big),\Big(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{6}+$
$+2\pi n,-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m\Big),\Big(\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\dfrac{\pi}{6}+2\pi m\Big),\Big(\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\dfrac{5\pi}{6}+$
$+2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{6}+2\pi m\Big)\Big\},\ \forall k,n,m\in\mathbb{Z}.$

Задача 11. Найдите все упорядоченные тройки чисел (x,y,z), являющиеся решением системы уравнений:

$$\begin{cases} 8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0, \\ x+y=z. \end{cases} \tag{22}$$

Решение. Тригонометрическое уравнение

$$8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0 \iff$$

$$\iff 4\big(\cos(x+y)+\cos(x-y)\big)\cos(x-y)+1=0 \iff$$

$$\iff 4\cos^2(x-y)+4\cos(x-y)\cos(x+y)+1=0 \iff$$

$$\iff \big(2\cos(x-y)+\cos(x+y)\big)^2+1-\cos^2(x+y)=0.$$

Так как $\cos^2(x+y)\leqslant 1,\ \forall x,y\in\mathbb{R},$ то

$$1-\cos^2(x+y)\geqslant 0,\ \forall x,y\in\mathbb{R},$$

и поэтому полученное равенство равносильно системе ("распадается"на систему двух уравнений)

$$\begin{cases} 2\cos(x-y)+\cos(x+y)=0, \\ \cos^2(x+y)=1. \end{cases}$$

Следовательно, система (22) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos(x+y)=1, \\ 2\cos(x-y)+1=0, \\ x+y=z, \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=2\pi n, \\ x-y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \\ z=2\pi n \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+y=2\pi n, \\ x-y=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \\ z=2\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2\pi n, \\ x-y=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \\ z=2\pi n \end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k), \\ y=-\dfrac{\pi}{3}+\pi(n-k), \\ z=2\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k), \\ y=\dfrac{\pi}{3}+\pi(n-k), \\ z=2\pi n,\ \forall k,n\in\mathbb{Z}; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \cos(x+y)=-1, \\ 2\cos(x-y)-1=0, \\ x+y=z, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=\pi+2\pi n, \\ x-y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, \\ z=\pi+2\pi n \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+y=\pi+2\pi n, \\ x-y=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, \\ z=\pi+2\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=\pi+2\pi n, \\ x-y=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, \\ z=\pi+2\pi n \end{cases}\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{3}+\pi(n+k), \\ y=\dfrac{\pi}{3}+\pi(n-k), \\ z=\pi+2\pi n, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k), \\ y=\dfrac{2\pi}{3}+\pi(n-k), \\ z=\pi+2\pi n,\ \forall k,n\in\mathbb{Z}. \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\Big\{\Big(\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k),\ -\dfrac{\pi}{3}+\pi(n-k), 2\pi n\Big), \Big(-\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k),$
$\dfrac{\pi}{3}+\pi(n-k), 2\pi n\Big), \Big(\dfrac{2\pi}{3}+\pi(n+k), \dfrac{\pi}{3}+\pi(n-k), \pi(2n+1)\Big),$
$\Big(\dfrac{\pi}{3}+\pi(n+k), \dfrac{2\pi}{3}+\pi(n-k), \pi(2n+1)\Big)\Big\},\ \forall k,n\in\mathbb{Z}.$

Задача 12. Решите уравнение:

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y). \tag{23}$$

Решение. Пусть

$$\operatorname{tg}^2 x = u,\ \operatorname{tg}^2 y = v.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = u^2 + v^2 + \frac{2}{uv}\,.$$

Поскольку

$$(u-v)^2 \geqslant 0 \iff u^2 + v^2 \geqslant 2uv,$$

то при $u > 0,\ v > 0$

$$u^2 + v^2 + \frac{2}{uv} \geqslant 2uv + \frac{2}{uv} = 2\left(uv + \frac{1}{uv}\right) \geqslant 4,$$

так как при $a > 0$

$$(a-1)^2 \geqslant 0 \iff a^2 + 1 \geqslant 2a \implies a + \frac{1}{a} \geqslant 2.$$

Итак, выражение в левой части уравнения (23) не меньше 4, а выражение в правой части — не больше 4, так как

$$\sin^2(x+y) \leqslant 1,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Поэтому уравнение (23) равносильно системе

$$\begin{cases} 3 + \sin^2(x+y) = 4, \\ \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin^2(x+y) = 1, \\ \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y = 1, \end{cases}$$

потому что равенство в нестрогом неравенстве

$$uv + \frac{1}{uv} \geqslant 2$$

достигается при $uv = 1$, а в неравенстве

$$u^2 + v^2 \geqslant 2uv$$

достигается при $u = v$.

Значит, в обоих неравенствах одновременно равенство достигается лишь при $u = v = 1$.

Система уравнений

$$\begin{cases} \sin^2(x+y) = 1, \\ \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ \operatorname{tg}^2 y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi m, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi m, \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi m, \\ y = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \end{array}\right.$$

где k, m и n — целые числа.

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi m, \dfrac{\pi}{4} + \pi k\right), \left(-\dfrac{\pi}{4} + \pi m, -\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right)\right\}$, $\forall k, m \in \mathbb{Z}$.

Задача 13. Исключите x и y из системы:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b, \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\,\operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}. \end{cases} \tag{24}$$

Решение. Уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \iff \frac{\sin\dfrac{x}{2}\,\sin\dfrac{y}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}\,\cos\dfrac{y}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \iff$$

$$\iff \frac{\cos\dfrac{x-y}{2} - \cos\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x-y}{2} + \cos\dfrac{x+y}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1}.$$

Используя свойство

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

пропорции $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, получаем, что

$$\frac{-\cos\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x-y}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 1}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} + 1} \iff \frac{\cos\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x-y}{2}} = \cos\alpha.$$

Далее,

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\sin x + \sin y)^2 = a^2, \\ (\cos x + \cos y)^2 = b^2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x\, \sin y + \sin^2 y + \cos^2 x + 2\cos x\, \cos y + \cos^2 y = a^2 + b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2(\sin x\, \sin y + \cos y\, \cos y) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2 + 2\cos(x-y) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow$$

$$\iff 2\big(1 + \cos(x-y)\big) = a^2 + b^2 \iff 4\cos^2\frac{x-y}{2} = a^2 + b^2.$$

Итак,

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\dfrac{x+y}{2}}{\cos\dfrac{x-y}{2}} = \cos\alpha, \\ \\ 4\cos^2\dfrac{x-y}{2} = a^2 + b^2 \end{cases} \Longrightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a^2+b^2}{2}\cos\alpha \iff$$

$$\iff \cos x + \cos y = \frac{a^2+b^2}{2}\cos\alpha,$$

а учитывая, что $\cos x + \cos y = b$, получаем:

$$b = \frac{a^2+b^2}{2}\cos\alpha \iff 2b = (a^2+b^2)\cos\alpha.$$

Ответ: $2b = (a^2+b^2)\cos\alpha$.

§ 6. Тригонометрические системы с параметрами

Задача 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = 2b \end{cases} \tag{1}$$

относительно x и y.

Решение. Используя формулу преобразования суммы синусов в произведение, систему (1) приводим к равносильной системе

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = a, \\ x + y = 2b \end{cases} \iff \begin{cases} \sin b\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{a}{2}, \\ x + y = 2b. \end{cases}$$

В зависимости от параметров a и b рассмотрим логически возможные случаи.

Если

$$\sin b = 0 \iff b = \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы будет следующим:

$$0\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2}\,.$$

Это уравнение при $a \neq 0$ решений не имеет.

Если же $a = 0$, то любые действительные числа x и y будут его решениями.

Поэтому при

$$a \neq 0,\ b = \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (1) решений не имеет, а при

$$a = 0,\ b = \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (1) будет множество упорядоченных пар

$$\{(x, 2\pi k - x)\},$$

где x — любое действительное число, а k — любое целое число.

Если

$$\sin b \neq 0 \iff b \neq \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы является простейшим тригонометрическим уравнением

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin b}\,. \tag{2}$$

Если $\left|\dfrac{a}{2\sin b}\right| \leqslant 1$, т.е. если

$$|a| \leqslant 2|\sin b|,$$

то из уравнения (2) получаем равенство

$$x - y = \pm 2A + 4\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

где $A = \arccos \dfrac{a}{2\sin b}$.

Если $\left|\dfrac{a}{2\sin b}\right| > 1$, т.е.

$$|a| > 2|\sin b|,$$

то уравнение (2) решений не имеет.

Итак, при

$$|a| > 2|\sin b|, \ b \neq \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (1) решений не имеет, а при

$$|a| \leqslant 2|\sin b|, \ b \neq \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (1) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - y = -2A + 4\pi n, \\ x + y = 2b \end{cases} \iff \begin{cases} x = b - A + 2\pi n, \\ y = b + A - 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2A + 4\pi n, \\ x + y = 2b \end{cases} \iff \begin{cases} x = b + A + 2\pi n, \\ y = b - A - 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(x, 2\pi k - x)\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},$ при $a = 0, b = \pi k, \forall k \in \mathbb{Z};$ $\{(b + A + 2\pi n, b - A - 2\pi n), (b - A + 2\pi n, b + A - 2\pi n)\}, \forall n \in \mathbb{Z},$ при $|a| \leqslant 2|\sin b|,\ b \neq \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ A = \arccos \dfrac{a}{2\sin b}$;

$\varnothing$ при $a \neq 0,\ b = \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$ и при $|a| > 2|\sin b|, b \neq \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$

Замечание 1. Систему (1) можно решить методом исключения переменной.

Например, сначала из второго уравнения выразим переменную y через переменную x:

$$y = 2b - x.$$

Затем $y = 2b - x$ подставим в первое уравнение:

$$(1 - \cos 2b)\sin x + \sin 2b \cos x = a.$$

При таком методе решения систему (1) приводим к равносильной тригонометрической системе

$$\begin{cases} (1 - \cos 2b)\sin x + \sin 2b \cos x = a, \\ y = 2b - x. \end{cases}$$

Задача 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = a, \\ x - y = b \end{cases}$$

относительно x и y.

Ответ: $\{(x, x - 2\pi k)\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},$ при $a = 0, b = 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z};$

$\varnothing$ при $a \neq 0, b = 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z},$ при $|a| > 2\left|\sin \dfrac{b}{2}\right|, b \neq 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z};$

$$\left\{\left(\frac{b}{2} + A + 2\pi n,\ -\frac{b}{2} + A + 2\pi n\right), \left(\frac{b}{2} - A + 2\pi n,\ -\frac{b}{2} - A + 2\pi n\right)\right\},$$

$\forall k \in \mathbb{Z},$ при $|a| \leqslant 2\left|\sin \dfrac{b}{2}\right|,\ b \neq 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ A = \arccos \dfrac{a}{2\sin \dfrac{b}{2}}$.

Задача 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x - y = b \end{cases} \tag{3}$$

относительно x и y.

Решение. Используя формулу преобразования суммы синусов в произведение, систему (3) приводим к равносильной системе

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = a, \\ x - y = b \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\dfrac{b}{2}\cdot\sin\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{a}{2}, \\ x - y = b. \end{cases}$$

В зависимости от параметров a и b рассмотрим логически возможные случаи.

Если

$$\cos\frac{b}{2} = 0 \iff \frac{b}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \iff b = \pi + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы будет следующим:

$$0\cdot\sin\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}.$$

Это уравнение при $a \neq 0$ решений не имеет.

Если же $a = 0$, то любые действительные числа x и y будут его решениями.

Поэтому при

$$a \neq 0,\ b = \pi + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (3) решений не имеет, а при

$$a = 0,\ b = \pi + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (3) будет множество упорядоченных пар

$$\{(x, x - \pi - 2\pi k)\},$$

где x — любое действительное число, а k — любое целое число.

Если

$$\cos\frac{b}{2} \neq 0 \iff \frac{b}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \iff b \neq \pi + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы является простейшим тригонометрическим уравнением

$$\sin\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}\,. \tag{4}$$

Если $\left|\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}\right| \leqslant 1,$ т.е. если

$$|a| \leqslant 2\left|\cos\frac{b}{2}\right|,$$

то из уравнения (4) получаем равенство

$$x+y = (-1)^m\cdot 2A + 2\pi m,\ \forall m\in\mathbb{Z}, \tag{5}$$

где $A = \arcsin\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}\,.$

Если $\left|\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}\right| > 1,$ т.е. если

$$|a| > 2\left|\cos\frac{b}{2}\right|,$$

то уравнение (4) решений не имеет.

Итак, при

$$|a| > 2\left|\cos\frac{b}{2}\right|,\ b\neq\pi+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

система (3) решений не имеет, а при

$$|a| \leqslant 2\left|\cos\frac{b}{2}\right|,\ b\neq\pi+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

система (3) равносильна совокупности двух систем (в зависимости от четности или нечетности чисел m в равенстве (5)):

$$\begin{cases} x+y=2A+4\pi n, \\ x-y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x=A+\dfrac{b}{2}+2\pi n, \\ y=A-\dfrac{b}{2}+2\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2\pi-2A+4\pi n, \\ x-y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{b}{2}-A+(2n+1)\pi, \\ y=\ -\dfrac{b}{2}-A+(2n+1)\pi,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(x, x-\pi-2\pi k)\}, \forall x\in\mathbb{R}, \forall k\in\mathbb{Z}$, при $a=0, b=\pi+2\pi k, \forall k\in\mathbb{Z}$;

$\left\{\left(A+\dfrac{b}{2}+2\pi n, A-\dfrac{b}{2}+2\pi n\right), \left(\dfrac{b}{2}-A+(2n+1)\pi, -\dfrac{b}{2}-A+(2n+1)\pi\right)\right\}$,

$\forall n\in\mathbb{Z}$, при $|a|\leqslant 2\left|\cos\dfrac{b}{2}\right|$, $b\neq\pi+2\pi k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $A=\arcsin\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}$;

$\varnothing$ при $a\neq 0$, $b=\pi+2\pi k$, при $|a|>2\left|\cos\dfrac{b}{2}\right|$, $b\neq\pi+2\pi k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Замечание 2. Систему (3) можно решить методом исключения переменной. Например, сначала из второго уравнения выразим переменную y через переменную x:

$$y=x-b.$$

Затем $y=x-b$ подставим в первое уравнение:

$$(1+\cos b)\sin x-\sin b\cos x=a.$$

При таком методе решения систему (3) приводим к равносильной тригонометрической системе

$$\begin{cases} (1+\cos b)\sin x-\sin b\cos x=a, \\ y=x-b. \end{cases}$$

Задача 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=a, \\ x+y=b \end{cases} \tag{6}$$

относительно x и y.

Решение. Используя формулу преобразования суммы косинусов в произведение, систему (6) приводим к равносильной системе

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=a, \\ x+y=b \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\dfrac{b}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a}{2}, \\ x+y=b. \end{cases}$$

В зависимости от параметров a и b рассмотрим логически возможные случаи.

Если

$$\cos\frac{b}{2}=0 \iff \frac{b}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k \iff b=\pi+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы будет следующим:

$$0\cdot\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2}\,.$$

Это уравнение при $a\neq 0$ решений не имеет.

Если же $a=0$, то любые действительные числа x и y будут его решениями.

Поэтому при

$$a\neq 0,\ b=\pi+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

система (6) решений не имеет, а при

$$a=0,\ b=\pi+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

множеством решений системы (6) будет множество упорядоченных пар

$$\{(x,\pi-x+2\pi k)\},$$

где x — любое действительное число, а k — любое целое число.

Если

$$\cos\frac{b}{2}\neq 0 \iff \frac{b}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k \iff b\neq\pi+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы является простейшим тригонометрическим уравнением

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}\,. \tag{7}$$

Если $\left|\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}\right| \leqslant 1$, т.е. если

$$|a| \leqslant 2\left|\cos\frac{b}{2}\right|,$$

то из уравнения (7) получаем равенство

$$x - y = \pm 2A + 4\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

где $A = \arccos\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}$.

Если $\left|\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}\right| > 1$, т.е. если

$$|a| > 2\left|\cos\frac{b}{2}\right|,$$

то уравнение (7) решений не имеет.

Итак, при

$$|a| > 2\left|\cos\frac{b}{2}\right|, \ b \neq \pi + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (6) решений не имеет, а при

$$|a| \leqslant 2\left|\cos\frac{b}{2}\right|, \ b \neq \pi + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (6) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - y = -2A + 4\pi n, \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{b}{2} - A + 2\pi n, \\ y = \dfrac{b}{2} + A - 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2A + 4\pi n, \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{b}{2} + A + 2\pi n, \\ y = \dfrac{b}{2} - A - 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(x, \pi - x + 2\pi k)\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},$ при $a = 0, b = \pi + 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z};$

$\left\{\left(\dfrac{b}{2} + A + 2\pi n, \dfrac{b}{2} - A - 2\pi n\right), \left(\dfrac{b}{2} - A + 2\pi n, \dfrac{b}{2} + A - 2\pi n\right)\right\}, \forall n \in \mathbb{Z},$

при $|a| \leqslant 2\left|\cos\dfrac{b}{2}\right|, b \neq \pi + 2\pi k, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}, A = \arccos\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}};$

$\varnothing$ при $a \neq 0, b = \pi + 2\pi k,$ при $|a| > 2\left|\cos\dfrac{b}{2}\right|, b \neq \pi + 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z}.$

Замечание 3. Систему (6) можно решить методом исключения переменной. Например, сначала из второго уравнения выразим переменную y через переменную x:

$$y = b - x.$$

Затем $y = b - x$ подставим в первое уравнение:

$$\sin b \sin x + (1 + \cos b)\cos x = a.$$

При таком методе решения систему (6) приводим к равносильной тригонометрической системе

$$\begin{cases} \sin b \sin x + (1 + \cos b)\cos x = a, \\ y = b - x. \end{cases}$$

Задача 5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x - \cos y = a, \\ x + y = b \end{cases} \tag{8}$$

относительно x и y.

Решение. Используя формулу преобразования разности косинусов в произведение, систему (8) приводим к равносильной системе

$$\begin{cases} -2\sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \sin\dfrac{x-y}{2} = a, \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} \sin\dfrac{b}{2} \cdot \sin\dfrac{y-x}{2} = \dfrac{a}{2}, \\ x + y = b. \end{cases}$$

В зависимости от параметров a и b рассмотрим логически возможные случаи.

Если

$$\sin\frac{b}{2}=0 \iff \frac{b}{2}=\pi k \iff b=2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы будет следующим:

$$0\cdot\sin\frac{y-x}{2}=\frac{a}{2}\,.$$

Если $a\neq 0,$ то это уравнение решений не имеет.
При $a=0$ любые действительные числа $x,\ y$ будут его решениями.
Поэтому при

$$a\neq 0,\ b=2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

система (8) решений не имеет, а при

$$a=0,\ b=2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

множеством решений системы (8) будет множество упорядоченных пар

$$\{(x,\ -x+2\pi k)\},$$

где x — любое действительное число, а k — любое целое число.
Если

$$\sin\frac{b}{2}\neq 0 \iff \frac{b}{2}\neq\pi k \iff b\neq 2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы является простейшим тригонометрическим уравнением

$$\sin\frac{y-x}{2}=\frac{a}{2\sin\frac{b}{2}}\,. \tag{9}$$

Если $\left|\dfrac{a}{2\sin\frac{b}{2}}\right|\leqslant 1,$ т.е. если

$$|a|\leqslant 2\left|\sin\frac{b}{2}\right|,$$

то из уравнения (9) получаем равенство

$$y-x=(-1)^m\cdot 2A+2\pi m,\ \forall m\in\mathbb{Z}, \tag{10}$$

где $A=\arcsin\dfrac{a}{2\sin\frac{b}{2}}\,.$

Если $\left|\dfrac{a}{2\sin\dfrac{b}{2}}\right| > 1,$ т.е. если

$$|a| > 2\left|\sin\frac{b}{2}\right|,$$

то уравнение (9) решений не имеет.

Итак, при

$$|a| > 2\left|\sin\frac{b}{2}\right|,\ b \neq 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (8) решений не имеет, а при

$$|a| \leqslant 2\left|\sin\frac{b}{2}\right|,\ b \neq 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (8) равносильна совокупности двух систем (в зависимости от четности или нечетности чисел m в равенстве (10)):

$$\begin{cases} y - x = -2A + 2\pi(2n+1), \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{b}{2} + A - \pi(2n+1), \\ y = \dfrac{b}{2} - A + \pi(2n+1), \forall n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 2A + 4\pi n, \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{b}{2} - A - 2\pi n, \\ y = \dfrac{b}{2} + A + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\{(x,\ -x + 2\pi k)\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},$ при $a = 0, b = 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z};$

$$\left\{\left(\frac{b}{2} + A - \pi(2n+1), \frac{b}{2} - A + \pi(2n+1)\right), \left(\frac{b}{2} - A - 2\pi n, \frac{b}{2} + A + 2\pi n\right)\right\},$$

$\forall n \in \mathbb{Z},$ при $|a| \leqslant 2\left|\sin\dfrac{b}{2}\right|, b \neq 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z},$ где $A = \arcsin\dfrac{a}{2\sin\dfrac{b}{2}}$;

$\varnothing$ при $a \neq 0, b = 2\pi k,$ при $|a| > 2\left|\sin\dfrac{b}{2}\right|, b \neq 2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z}.$

Замечание 4. Систему (8) можно решить методом исключения переменной. Например, сначала из второго уравнения выразим переменную y через переменную x:

$$y = b - x.$$

Затем $y = b - x$ подставим в первое уравнение:

$$-\sin b \sin x + (1 - \cos b)\cos x = a.$$

При таком методе решения систему (8) приводим к равносильной тригонометрической системе

$$\begin{cases} -\sin b \sin x + (1 - \cos b)\cos x = a, \\ y = b - x. \end{cases}$$

Задача 6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = a, \\ x + y = b \end{cases} \tag{11}$$

относительно x и y.

Решение. Используя формулу приведения и формулу преобразования суммы косинусов в произведение, получаем

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = a, \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos y = a, \\ x + y = b \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x - y}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x + y}{2}\right) = a, \\ x + y = b \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{b}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x - y}{2}\right) = \dfrac{a}{2}, \\ x + y = b. \end{cases}$$

В зависимости от параметров a и b рассмотрим логически возможные случаи.

Если

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right) = 0 \iff \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi k \iff b = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы будет следующим:

$$0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) = \frac{a}{2}\,.$$

Это уравнение при $a \neq 0$ решений не имеет.

Если же $a = 0$, то любые действительные числа x и y будут его решениями.

Поэтому при

$$a \neq 0,\ b = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (11) решений не имеет, а при

$$a = 0,\ b = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (11) будет множество упорядоченных пар

$$\left\{\left(x,\ -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right\},$$

где x — любое действительное число, а k — любое целое число.

Если

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right) \neq 0 \iff \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} \neq \frac{\pi}{2} - \pi k \iff b \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы является простейшим тригонометрическим уравнением

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) = \frac{a}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right)}\,. \tag{12}$$

Если $\left|\dfrac{a}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right)}\right| \leqslant 1$, т.е. если

$$|a| \leqslant 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\right)\right|,$$

то из уравнения (12) получаем равенство

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}= \pm A-2\pi n \iff x-y=\frac{\pi}{2}\mp 2A+4\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z},$$

где $A=\arccos\dfrac{a}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{b}{2}\right)}$.

Если $\left|\dfrac{a}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{b}{2}\right)}\right|>1$, т.е. если

$$|a|>2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|,$$

то уравнение (12) решений не имеет.

Итак, при

$$|a|>2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|,\ b\neq -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

система (11) решений не имеет, а при

$$|a|\leqslant 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|,\ b\neq -\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

система (11) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2}+2A+4\pi n, \\ x+y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{b}{2}+\dfrac{\pi}{4}+A+2\pi n, \\ y=\dfrac{b}{2}-\dfrac{\pi}{4}-A-2\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2}-2A+4\pi n, \\ x+y=b \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{b}{2}+\dfrac{\pi}{4}-A+2\pi n, \\ y=\dfrac{b}{2}-\dfrac{\pi}{4}+A-2\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ:

$\left\{\left(x,\ -x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right\},\ \forall x\in\mathbb{R}$, при $a=0,\ b=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$;

$$\left\{\left(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{4}+A+2\pi n, \frac{b}{2}-\frac{\pi}{4}-A-2\pi n\right), \left(\frac{b}{2}+\frac{\pi}{4}-A+2\pi n, \frac{b}{2}-\frac{\pi}{4}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+A-2\pi n\right)\right\}, \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ при } |a| \leqslant 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|, b \neq -\frac{\pi}{2}+2\pi k, \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$A = \arccos\frac{a}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)}; \ \varnothing \text{ при } |a| > 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|, b \neq -\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

и при $a \neq 0$, $b = -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

Замечание 5. Систему (11) можно решить методом исключения переменной. Например, сначала из второго уравнения выразим переменную y через переменную x:

$$y = x - b.$$

Затем $y = x - b$ подставим в первое уравнение:

$$(1+\sin b)\sin x + \cos b\cos x = a.$$

При таком методе решения систему (11) приводим к равносильной тригонометрической системе

$$\begin{cases} (1+\sin b)\sin x + \cos b\cos x = a, \\ y = x - b. \end{cases}$$

Задача 7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = a, \\ x + y = b \end{cases} \tag{13}$$

относительно x и y.

Решение. Используя формулу приведения и формулу преобразования разности косинусов в произведение, получаем

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = a, \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \cos y = a, \\ x + y = b \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -2\sin\Big(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x-y}{2}\Big)\cdot \sin\Big(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x+y}{2}\Big) = a, \\ x + y = b \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sin\Big(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{b}{2}\Big)\cdot \sin\Big(\dfrac{x-y}{2} - \dfrac{\pi}{4}\Big) = \dfrac{a}{2}\,, \\ x + y = b. \end{cases}$$

В зависимости от параметров a и b рассмотрим логически возможные случаи.

Если

$$\sin\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\Big) = 0 \iff \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} = -\pi k \iff b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы будет следующим:

$$0 \cdot \sin\Big(\frac{x-y}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{a}{2}\,.$$

Это уравнение при $a \neq 0$ решений не имеет.

Если же $a = 0,$ то любые действительные числа x и y будут его решениями.

Поэтому при

$$a \neq 0, \ b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (13) решений не имеет, а при

$$a = 0, \ b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (13) будет множество упорядоченных пар

$$\Big\{\Big(x, \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\Big)\Big\},$$

где x — любое действительное число, а k — любое целое число.

Если

$$\sin\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}\Big) \neq 0 \iff \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} \neq -\pi k \iff b \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение приведенной системы является простейшим тригонометрическим уравнением

$$\sin\left(\frac{x-y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)}\,. \tag{14}$$

Если $\left|\dfrac{a}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)}\right|\leqslant 1,$ т.е. если

$$|a|\leqslant 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|,$$

то из уравнения (14) получаем равенство

$$\frac{x-y}{2}-\frac{\pi}{4}=(-1)^m A+\pi m \iff$$

$$\iff x-y=\frac{\pi}{2}+(-1)^m\cdot 2A+2\pi m,\ \forall m\in\mathbb{Z}, \tag{15}$$

где $A=\arcsin\dfrac{a}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)}\,.$

Если $\left|\dfrac{a}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)}\right|>1,$ т.е. если

$$|a|>2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|,$$

то уравнение (14) решений не имеет.

Итак, при

$$|a|>2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|,\ b\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

система (13) решений не имеет, а при

$$|a|\leqslant 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)\right|,\ b\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

система (13) равносильна совокупности двух систем (в зависимости от четности или нечетности чисел m в равенстве (15)):

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{5\pi}{2}-2A+4\pi n, \\ x+y=b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b}{2}+\dfrac{5\pi}{4}-A+2\pi n, \\ y=\dfrac{b}{2}-\dfrac{5\pi}{4}+A-2\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2}+2A+4\pi n, \\ x+y=b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b}{2}+\dfrac{\pi}{4}+A+2\pi n, \\ y=\dfrac{b}{2}-\dfrac{\pi}{4}-A-2\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ:

$\left\{\left(x,\ -x+\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right\}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, при $a=0,\ b=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$;

$\left\{\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{5\pi}{4}-A+2\pi n, \dfrac{b}{2}-\dfrac{5\pi}{4}+A-2\pi n\right), \left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{\pi}{4}+A+2\pi n, \dfrac{b}{2}-\dfrac{\pi}{4}-\right.\right.$

$\left.\left.-A-2\pi n\right)\right\}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, при $|a|\leqslant 2\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{b}{2}\right)\right|$, $b\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$,

$A=\arcsin\dfrac{a}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{b}{2}\right)}$; $\varnothing$ при $|a|>2\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{b}{2}\right)\right|$, $b\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$,

и при $a\neq 0,\ b=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$.

Замечание 6. Систему (13) можно решить методом исключения переменной. Например, сначала из второго уравнения выразим переменную y через переменную x:

$$y=b-x.$$

Затем $y=b-x$ подставим в первое уравнение:

$$(1-\sin b)\sin x-\cos b\cos x=a.$$

При таком методе решения систему (13) приводим к равносильной тригонометрической системе

$$\begin{cases} (1-\sin b)\sin x-\cos b\cos x=a, \\ y=b-x. \end{cases}$$

Задача 8. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \delta, \\ x + y = \gamma \end{cases} \tag{16}$$

относительно x и y.

Решение. Из второго уравнения системы (16) выразим неизвестную x через неизвестную y и подставим $x = \gamma - y$ в первое уравнение:

$$\operatorname{tg}(\gamma - y) - \operatorname{tg} y = \delta \iff \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg} y} - \operatorname{tg} y - \delta = 0 \iff$$

$$\iff \frac{\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}^2 y + (2 + \delta \operatorname{tg}\gamma) \operatorname{tg} y + \delta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg} y} = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) с неизвестной y зависит от параметра γ и имеет смысл при $\gamma \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Введем обозначения

$$\operatorname{tg}\gamma = a, \ \ \operatorname{tg} y = u$$

и рассмотрим рациональное уравнение

$$\frac{au^2 + (2 + \delta a)u + \delta - a}{1 + au} = 0. \tag{18}$$

Если $a = 0$, то уравнение (18) будет иметь вид:

$$2u + \delta = 0,$$

из которого находим, что $u = -\dfrac{\delta}{2}$.

Если $a \neq 0$, то квадратное уравнение

$$au^2 + (2 + \delta a)u + \delta - a = 0$$

имеет дискриминант $D = 4 + \delta^2 a^2 + 4a^2 > 0$, и его корнями будут

$$u_1 = -\frac{2 + \delta a + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad u_2 = -\frac{2 + \delta a - \sqrt{D}}{2a}.$$

Знаменатель дроби в левой части равенства (18) обращается в нуль при $u = -\dfrac{1}{a}$, а квадратный трехчлен $au^2 + (2+\delta a)u + \delta - a$ при $u = -\dfrac{1}{a}$ равен числу $-\dfrac{1+a^2}{a}$, которое отлично от нуля.

Поэтому u_1 и u_2 являются корнями уравнения (18).

Учитывая обозначения, приходим к следующим выводам.

При $\operatorname{tg}\gamma = 0$, т.е. когда

$$\gamma = \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

уравнение (17) равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} y = -\frac{\delta}{2} \iff y = -\operatorname{arctg}\frac{\delta}{2} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

При $\operatorname{tg}\gamma \neq 0$, т.е. когда

$$\gamma \neq \frac{\pi}{2}\,k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

уравнение (17) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} y = -A, \\ \operatorname{tg} y = -B \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = -\operatorname{arctg} A + \pi n, \\ y = -\operatorname{arctg} B + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right.$$

где приняты обозначения

$$A = \frac{2 + \delta\operatorname{tg}\gamma + \sqrt{D}}{2\operatorname{tg}\gamma}\,,\quad B = \frac{2 + \delta\operatorname{tg}\gamma - \sqrt{D}}{2\operatorname{tg}\gamma}$$

при $D = 4 + \delta^2\operatorname{tg}^2\gamma + 4\operatorname{tg}^2\gamma$.

Итак, если

$$\gamma = \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то система (16) равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} y = -\operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{2} + \pi n, \\ x = \gamma - y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{2} + \pi(k-n),\ \forall k \in \mathbb{Z}, \\ y = -\operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{2} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Если

$$\gamma \neq \frac{\pi}{2}\,k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то система (16) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y = -\operatorname{arctg} A + \pi n, \\ x = \gamma - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \gamma + \operatorname{arctg} A - \pi n, \\ y = -\operatorname{arctg} A + \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\operatorname{arctg} B + \pi n, \\ x = \gamma - y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \gamma + \operatorname{arctg} B - \pi n, \\ y = -\operatorname{arctg} B + \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

В случае, когда

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

также из второго уравнения системы (16) выразим неизвестную x через неизвестную y и подставим

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k - y, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

в первое уравнение:

$$\operatorname{tg}\Bigl(\frac{\pi}{2} + \pi k - y\Bigr) - \operatorname{tg} y = \delta \iff \operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y = \delta \iff$$

$$\iff \frac{\cos^2 y - \sin^2 y}{\sin y \cos y} = \delta \iff \frac{2\cos 2y}{\sin 2y} = \delta \iff$$

$$\iff \operatorname{ctg} 2y = \frac{\delta}{2} \iff 2y = \operatorname{arcctg} \frac{\delta}{2} + \pi n \iff$$

$$\iff y = \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2}\, n, \ \forall n \in \mathbb{Z} \text{ при любом } \delta \in \mathbb{R}.$$

Значит, при любом действительном δ и

$$\gamma = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (16) будет

$$\Bigl\{\Bigl(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2}\,(2k - n), \frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2}\, n\Bigr)\Bigr\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{2}+\pi(k-n),\ -\operatorname{arctg}\dfrac{\delta}{2}+\pi n\right)\right\}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, при любом $\delta\in\mathbb{R}$, $\gamma=\pi k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$; $\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{\delta}{2}+\dfrac{\pi}{2}(2k-n),\right.\right.$ $\left.\left.\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{\delta}{2}+\dfrac{\pi}{2}n\right)\right\}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, при любом $\delta\in\mathbb{R}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$; $\big\{(\gamma+\operatorname{arctg}A-\pi n,\ -\operatorname{arctg}A+\pi n),\ (\gamma+\operatorname{arctg}B-\pi n,\ -\operatorname{arctg}B+\pi n)\big\}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, при $\forall\,\delta\in\mathbb{R}$, $\gamma\neq\dfrac{\pi}{2}k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $A=\dfrac{2+\delta\operatorname{tg}\gamma+\sqrt{D}}{2\operatorname{tg}\gamma}$, $B=\dfrac{2+\delta\operatorname{tg}\gamma-\sqrt{D}}{2\operatorname{tg}\gamma}$, $D=4+\delta^2\operatorname{tg}^2\gamma+4\operatorname{tg}^2\gamma$.

Задача 9. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=a,\\ x-y=b\end{cases}\tag{19}$$

относительно x и y.

Решение. Из второго уравнения системы (19) выразим неизвестную x через неизвестную y и подставим

$$x=b+y$$

в первое уравнение:

$$\operatorname{ctg}(b+y)+\operatorname{ctg}y=a\iff\frac{\operatorname{ctg}b\,\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}b+\operatorname{ctg}y}+\operatorname{ctg}y-a=0\iff$$

$$\iff\frac{\operatorname{ctg}^2y+(2\operatorname{ctg}b-a)\operatorname{ctg}y-1-a\operatorname{ctg}b}{\operatorname{ctg}b+\operatorname{ctg}y}=0.\tag{20}$$

Уравнение (20) с неизвестной y зависит от параметра b и имеет смысл при $b\neq\pi k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Введем обозначения

$$\operatorname{ctg}b=\gamma,\ \operatorname{ctg}y=u$$

и рассмотрим рациональное уравнение

$$\frac{u^2 + (2\gamma - a)u - 1 - a\gamma}{\gamma + u} = 0. \qquad (21)$$

У квадратного уравнения

$$u^2 + (2\gamma - a)u - 1 - a\gamma = 0 \qquad (22)$$

дискриминант $D = 4\gamma^2 + a^2 + 4$ положителен при любых $a,\ \gamma \in \mathbb{R}$.

Корнями уравнения (22) будут

$$u_1 = \frac{a}{2} - \gamma + \sqrt{4\gamma^2 + a^2 + 4}$$

и

$$u_2 = \frac{a}{2} - \gamma - \sqrt{4\gamma^2 + a^2 + 4}\,.$$

Знаменатель дроби в левой части равенства (21) обращается в нуль при $u = -\gamma$.

Уравнение

$$\frac{a}{2} - \gamma + \sqrt{4\gamma^2 + a^2 + 4} = -\gamma \iff \sqrt{4\gamma^2 + a^2 + 4} = -\frac{a}{2} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -a \geqslant 0, \\ 4\gamma^2 + a^2 + 4 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a \leqslant 0, \\ 4\gamma^2 = -4 - \dfrac{3a^2}{4} \end{cases}$$

и уравнение

$$\frac{a}{2} - \gamma - \sqrt{4\gamma^2 + a^2 + 4} = -\gamma \iff \sqrt{4\gamma^2 + a^2 + 4} = \frac{a}{2} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \geqslant 0, \\ 4\gamma^2 + a^2 + 4 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a \geqslant 0, \\ 4\gamma^2 = -4 - \dfrac{3a^2}{4} \end{cases}$$

не имеют решений, так как выражение

$$4\gamma^2 \geqslant 0,\ \forall \gamma \in \mathbb{R}, \quad \text{а} \quad -4 - \frac{3a^2}{4} < 0,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Значит, при любых действительных a и γ решениями рационального уравнения (21) являются u_1 и u_2.

Учитывая обозначения, приходим к следующим выводам.

При любом $a \in \mathbb{R}$ и

$$b \neq \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

уравнение (20) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{aligned} &\operatorname{ctg} y = A, \\ &\operatorname{ctg} y = B \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &y = \operatorname{arcctg} A + \pi n, \\ &y = \operatorname{arcctg} B + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}\right.$$

где приняты обозначения

$$A = \frac{a}{2} - \operatorname{ctg} b + \sqrt{4 \operatorname{ctg}^2 b + a^2 + 4}\,,$$

$$B = \frac{a}{2} - \operatorname{ctg} b - \sqrt{4 \operatorname{ctg}^2 b + a^2 + 4}\,.$$

Итак, при любом $a \in \mathbb{R}$ и

$$b \neq \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (19) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y = \operatorname{arcctg} A + \pi n, \\ x = b + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = b + \operatorname{arcctg} A + \pi n, \\ y = \operatorname{arcctg} A + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{arcctg} B + \pi n, \\ x = b + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = b + \operatorname{arcctg} B + \pi n, \\ y = \operatorname{arcctg} B + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

В случае, когда

$$b = \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

система (19) примет вид:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = a, \\ x - y = \pi k \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + \pi k, \\ \operatorname{ctg}(y + \pi k) + \operatorname{ctg} y = a \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y + \pi k, \\ 2 \operatorname{ctg} y = a \end{cases} \iff \begin{cases} y = \operatorname{arcctg} \dfrac{a}{2} + \pi n, \\ x = \operatorname{arcctg} \dfrac{a}{2} + \pi(n + k), \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Значит, при любом $a \in \mathbb{R}$ и

$$b = \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (19) будет

$$\left\{ \left(\operatorname{arcctg} \frac{a}{2} + \pi(n + k), \operatorname{arcctg} \frac{a}{2} + \pi n \right) \right\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:

$\left\{ \left(\operatorname{arcctg} \frac{a}{2} + \pi(n+k), \operatorname{arcctg} \frac{a}{2} + \pi n \right) \right\}, \forall n \in \mathbb{Z}$, при $\forall a \in \mathbb{R}, b = \pi k, \forall k \in \mathbb{Z}$;

$\{(b + \operatorname{arcctg} A + \pi n, \ \operatorname{arcctg} A + \pi n), (b + \operatorname{arcctg} B + \pi n, \ \operatorname{arcctg} B + \pi n)\}$,

$\forall n \in \mathbb{Z}$, при любом $a \in \mathbb{R}$, $b \neq \pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, где

$A = \frac{a}{2} - \operatorname{ctg} b + \sqrt{4 \operatorname{ctg}^2 b + a^2 + 4}$, $B = \frac{a}{2} - \operatorname{ctg} b - \sqrt{4 \operatorname{ctg}^2 b + a^2 + 4}$.

Задача 10. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = d, \\ |x - y| = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \tag{23}$$

относительно x и y.

Решение. Первое уравнение системы (23) равносильно уравнению

$$\frac{\sin x \sin y + \cos x \cos y}{\cos x \sin y} = d \iff \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y} = d.$$

Учитывая четность функции косинус, получаем тождество

$$\cos(x-y) = \cos|x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

на основании которого при $|x-y| = \dfrac{\pi}{3}$ первое уравнение системы (23) приводим к уравнению

$$\frac{\cos\dfrac{\pi}{3}}{\cos x \sin y} = d \iff \frac{1}{2\cos x \sin y} = d. \tag{24}$$

Если $d = 0$, то уравнение (24) решений не имеет.
Если $d \neq 0$, то уравнение (24) равносильно уравнению

$$2\cos x \sin y = \frac{1}{d} \iff \sin(y-x) + \sin(y+x) = \frac{1}{d}\,.$$

Таким образом, при $d = 0$ система (23) решений не имеет, а при $d \neq 0$ равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin(y-x) + \sin(x+y) = \dfrac{1}{d}\,, \\ y - x = \dfrac{\pi}{3}\,, \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{2 - d\sqrt{3}}{2d}\,, \\ y - x = \dfrac{\pi}{3}\,, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \sin(y-x) + \sin(x+y) = \dfrac{1}{d}\,, \\ y - x = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{2 + d\sqrt{3}}{2d}\,, \\ y - x = -\dfrac{\pi}{3}\,. \end{cases} \tag{26}$$

Решим систему (25).
Двойное неравенство

$$-1 \leqslant \frac{2 - d\sqrt{3}}{2d} \leqslant 1 \iff \begin{cases} \dfrac{2 - d\sqrt{3}}{2d} \geqslant -1, \\ \dfrac{2 - d\sqrt{3}}{2d} \leqslant 1 \end{cases} \iff$$

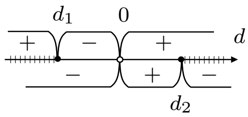
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2+\left(2-\sqrt{3}\right)d}{2d} \geqslant 0, \\ \dfrac{2-\left(2+\sqrt{3}\right)d}{2d} \leqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} d \leqslant -2\left(2+\sqrt{3}\right), \\ d \geqslant 2\left(2-\sqrt{3}\right). \end{array}\right.$$

При этом было учтено, что

$$2+\left(2-\sqrt{3}\right)d=0 \Longleftrightarrow d=-\frac{2}{2-\sqrt{3}} \Longleftrightarrow d=-2\left(2+\sqrt{3}\right),$$

$$2-\left(2+\sqrt{3}\right)d=0 \Longleftrightarrow d=\frac{2}{2+\sqrt{3}} \Longleftrightarrow d=2\left(2-\sqrt{3}\right),$$

и использован метод числовых промежутков, где $d_1=-2\left(2+\sqrt{3}\right)$, $d_2=2\left(2-\sqrt{3}\right)$:



.

Тогда совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2-d\sqrt{3}}{2d} < -1, \\ \dfrac{2-d\sqrt{3}}{2d} > 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\left(2+\sqrt{3}\right) < d < 0, \\ 0 < d < 2\left(2-\sqrt{3}\right). \end{array}\right.$$

Поэтому система (25) при

$$d \in \left(-2\left(2+\sqrt{3}\right);0\right) \cup \left(0;2\left(2-\sqrt{3}\right)\right)$$

не имеет решений, а при

$$d \in \left(-\infty;\,-2\left(2+\sqrt{3}\right)\right] \cup \left[2\left(2-\sqrt{3}\right);\,+\infty\right)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} x+y=(-1)^n A+\pi n, \\ y-x=\dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{(-1)^n}{2}A+\dfrac{1}{2}\pi n, \\ y=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{(-1)^n}{2}A+\dfrac{1}{2}\pi n, \end{cases}$$

где n — любое целое число, $A=\arcsin\dfrac{2-d\sqrt{3}}{2d}$.

Рассмотрим систему (26).

Двойное неравенство

$$-1 \leqslant \frac{2+d\sqrt{3}}{2d} \leqslant 1 \iff \begin{cases} \dfrac{2+d\sqrt{3}}{2d} \geqslant -1, \\ \dfrac{2+d\sqrt{3}}{2d} \leqslant 1 \end{cases} \iff$$

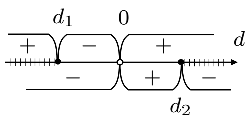
$$\iff \begin{cases} \dfrac{2+\left(2+\sqrt{3}\right)d}{2d} \geqslant 0, \\ \dfrac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)d}{2d} \leqslant 0 \end{cases} \iff \left[\begin{aligned} & d \leqslant -2\left(2-\sqrt{3}\right), \\ & d \geqslant 2\left(2+\sqrt{3}\right). \end{aligned}\right.$$

При этом было учтено, что

$$2+\left(2+\sqrt{3}\right)d = 0 \iff d = -\frac{2}{2+\sqrt{3}} \iff d = -2\left(2-\sqrt{3}\right),$$

$$2-\left(2-\sqrt{3}\right)d = 0 \iff d = \frac{2}{2-\sqrt{3}} \iff d = 2\left(2+\sqrt{3}\right),$$

и использован метод числовых промежутков, где $d_1 = -2\left(2-\sqrt{3}\right)$, $d_2 = 2\left(2+\sqrt{3}\right)$:



.

Тогда совокупность неравенств

$$\left[\begin{aligned} & \frac{2+d\sqrt{3}}{2d} < -1, \\ & \frac{2+d\sqrt{3}}{2d} > 1 \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} & -2\left(2-\sqrt{3}\right) < d < 0, \\ & 0 < d < 2\left(2+\sqrt{3}\right). \end{aligned}\right.$$

Поэтому система (26) при

$$d \in \left(-2\left(2-\sqrt{3}\right); 0\right) \cup \left(0; 2\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$$

не имеет решений, а при

$$d \in \left(-\infty; -2\left(2-\sqrt{3}\right)\right] \cup \left[2\left(2+\sqrt{3}\right); +\infty\right)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} x+y = (-1)^n B + \pi n, \\ x-y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2} B + \dfrac{1}{2}\pi n, \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2} B + \dfrac{1}{2}\pi n, \end{cases}$$

где n — любое целое число, $B = \arcsin\dfrac{2+d\sqrt{3}}{2d}$.

Ответ: $\Big\{\Big(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2}A + \dfrac{\pi n}{2}, \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2}A + \dfrac{\pi n}{2}\Big),$

$\Big(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2}B + \dfrac{\pi n}{2}, -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2}B + \dfrac{\pi n}{2}\Big)\Big\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, при любом $d \in \big(-\infty; -2(2+\sqrt{3})\big] \cup \big[2(2+\sqrt{3}); +\infty\big)$;

$\Big\{\Big(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2}B + \dfrac{\pi n}{2}, -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2}B + \dfrac{\pi n}{2}\Big)\Big\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, при любом $d \in \big(-2(2+\sqrt{3}); -2(2-\sqrt{3})\big]$;

$\Big\{\Big(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2}A + \dfrac{\pi n}{2}, \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{(-1)^n}{2}A + \dfrac{\pi n}{2}\Big)\Big\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, при любом $d \in \big[2(2-\sqrt{3}); 2(2+\sqrt{3})\big)$, где числа $A = \arcsin\dfrac{2-d\sqrt{3}}{2d}$, $B = \arcsin\dfrac{2+d\sqrt{3}}{2d}$; $\varnothing$ при любом $d \in \big(-2(2-\sqrt{3}); 2(2-\sqrt{3})\big)$.

Задача 11. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = a, \\ x + y = b \end{cases} \tag{27}$$

относительно x и y.

Решение. Первое уравнение системы (27) равносильно уравнению

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 2y}{2} = a \iff \cos 2x + \cos 2y = 2(1-a) \iff$$

$$\iff \cos(x+y)\cos(x-y) = 1-a.$$

Тогда система (27) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos(x+y)\cos(x-y) = 1-a \\ x+y=b \end{cases} \iff \begin{cases} \cos b \cdot \cos(x-y) = 1-a, \\ x+y=b. \end{cases} \tag{28}$$

В зависимости от параметров a и b рассмотрим логически возможные случаи.

Если

$$\cos b = 0 \iff b = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение системы (28) примет вид:

$$0 \cdot \cos(x - y) = 1 - a.$$

Это уравнение при $a \neq 1$ решений не имеет.

Если же $a = 1$, то любые действительные числа x и y являются его решениями.

Следовательно, при

$$a \neq 1, \ b = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (27) решений не имеет, а при

$$a = 1, \ b = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (27) будет множество упорядоченных пар

$$\left\{ \left(x, \frac{\pi}{2} - x + \pi k \right) \right\},$$

где x — любое действительное число, а k — любое целое число.

Если

$$\cos b \neq 0 \iff b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то первое уравнение системы (28) является простейшим тригонометрическим уравнением

$$\cos(x - y) = \frac{1 - a}{\cos b}\,. \tag{29}$$

Если $\left| \dfrac{1 - a}{\cos b} \right| \leqslant 1$, т.е. если

$$|1 - a| \leqslant |\cos b|,$$

то из уравнения (29) получаем равенство

$$x - y = \pm A + 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

где число $A = \arccos \dfrac{1-a}{\cos b}$.

Если $\left|\dfrac{1-a}{\cos b}\right| > 1$, т.е.

$$|1-a| > |\cos b|,$$

то уравнение (29) решений не имеет.

Следовательно, если

$$|1-a| > |\cos b|,\ b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то система (27) решений не имеет, если

$$|1-a| \leqslant |\cos b|,\ b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

то система (27) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - y = -A + 2\pi n, \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{b-A}{2} + \pi n, \\ y = \dfrac{b+A}{2} - \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x - y = A + 2\pi n, \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{b+A}{2} + \pi n, \\ y = \dfrac{b-A}{2} - \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(x, \dfrac{\pi}{2} - x + \pi k\right)\right\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, при $a = 1$, $b = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$;

$\left\{\left(\dfrac{b-A}{2} + \pi n, \dfrac{b+A}{2} - \pi n\right), \left(\dfrac{b+A}{2} + \pi n, \dfrac{b-A}{2} - \pi n\right)\right\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, при

$|1-a| \leqslant |\cos b|$, $b \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, где число $A = \arccos \dfrac{1-a}{\cos b}$;

$\varnothing$ при $a \neq 1$, $b = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, при $|1-a| > |\cos b|$, $b \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ x - y = b \end{cases} \tag{30}$$

относительно x и y.

Решение. Система (30) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos(x-y) - \cos(x+y) = 2a, \\ x - y = b \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(x+y) = \cos b - 2a, \\ x - y = b. \end{cases} \tag{31}$$

Если

$$|\cos b - 2a| > 1,$$

то система (30) не имеет решений, так как первое уравнение системы (31) имеет решения лишь при

$$|\cos b - 2a| \leqslant 1.$$

Если $|\cos b - 2a| \leqslant 1$, то система (30) равносильна совокупности двух систем.

Первая система

$$\begin{cases} x + y = -\arccos(\cos b - 2a) + 2\pi n, \\ x - y = b \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{2}\arccos(\cos b - 2a) + \pi n, \\ y = -\dfrac{b}{2} - \dfrac{1}{2}\arccos(\cos b - 2a) + \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вторая система

$$\begin{cases} x + y = \arccos(\cos b - 2a) + 2\pi n, \\ x - y = b \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{2}\arccos(\cos b - 2a) + \pi n, \\ y = -\dfrac{b}{2} + \dfrac{1}{2}\arccos(\cos b - 2a) + \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\varnothing$ при $|2a-\cos b|>1$; $\Big\{\Big(\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{2}\arccos(\cos b-2a)+\pi n,$

$-\dfrac{b}{2}-\dfrac{1}{2}\arccos(\cos b-2a)+\pi n\Big), \Big(\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}\arccos(\cos b-2a)+\pi n,$

$-\dfrac{b}{2}+\dfrac{1}{2}\arccos(\cos b-2a)+\pi n\Big)\Big\}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, при $|2a-\cos b|\leqslant 1$.

Задача 13. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = a,\\ x-y=b\end{cases} \tag{32}$$

относительно x и y.

Решение. Первое уравнение системы (32) равносильно уравнению

$$\frac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y}=a \iff \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}=a.$$

При $x-y=b$ первое уравнение системы (32) приводим к виду

$$\frac{\cos b+\cos(x+y)}{\cos b-\cos(x+y)}=a \iff \frac{(a+1)\cos(x+y)-(a-1)\cos b}{\cos(x+y)-\cos b}=0. \tag{33}$$

Уравнение

$$(a+1)\cos(x+y)-(a-1)\cos b=0 \tag{34}$$

при

$$\begin{cases}a+1=0,\\ \cos b=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=-1,\\ b=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},\end{cases}$$

своими корнями имеет любые действительные числа x и y.

Если

$$\begin{cases}a+1=0,\\ \cos b\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}a=-1,\\ b\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},\end{cases}$$

то уравнение (34) решений не имеет.

Если $a\neq -1$, то уравнение (34) равносильно уравнению

$$\cos(x+y) = \frac{a-1}{a+1}\ \cos b. \tag{35}$$

Если

$$|(a-1)\cos b| > |a+1|,$$

то уравнение (35) решений не имеет, а если

$$|(a-1)\cos b| \leqslant |a+1|,$$

то

$$x+y = \ \pm A + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{36}$$

где $A = \arccos \dfrac{(a-1)\cos b}{a+1}$.

Следовательно, когда

$$a = \ -1,\ \ b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

а также когда

$$a \neq \ -1,\ \ |(a-1)\cos b| > |a+1|,$$

уравнение (33) решений не имеет.

При этих условиях у системы (32) решений нет.

Уравнение

$$\cos(x+y) = \cos b \iff x+y = \ \pm b + 2\pi m,\ \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{37}$$

Поэтому уравнение (33) при

$$a = \ -1,\ \ b = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

своими решениями имеет любые действительные числа x и y, отличные от тех, у которых сумма

$$x+y = \frac{\pi}{2} + \pi(2m+k),\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

или

$$x+y = \ -\frac{\pi}{2} + \pi(2m-k),\ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Значит, при

$$a = -1,\ b = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (32) является множество упорядоченных пар

$$\Big\{\Big(y + \frac{\pi}{2} + \pi k, y\Big)\Big\},\ \forall y \in \Big(-\frac{\pi}{2} + \pi m, \frac{\pi}{2} + \pi m\Big),\ \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$a \neq -1,\ \ |(a-1)\cos b| \leqslant |a+1|.$$

Ввиду того что уравнения (35) и (37) не имеют общих решений, у уравнения (33) решения связаны соотношением (36). Поэтому система (32) равносильна совокупности двух систем.

Первая система

$$\begin{cases} x + y = -A + 2\pi n, \\ x - y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{b-A}{2} + \pi n, \\ y = -\dfrac{b+A}{2} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вторая система

$$\begin{cases} x + y = A + 2\pi n, \\ x - y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{b+A}{2} + \pi n, \\ y = \dfrac{A-b}{2} + \pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\Big\{\Big(\dfrac{b-A}{2}+\pi n, -\dfrac{b+A}{2}+\pi n\Big), \Big(\dfrac{b+A}{2}+\pi n, \dfrac{A-b}{2}+\pi n\Big)\Big\}, \forall n \in \mathbb{Z}$,

при $a \neq -1$, $|(a-1)\cos b| \leqslant |a+1|$, где число $A = \arccos \dfrac{(a-1)\cos b}{a+1}$;

$\Big\{\Big(y + \dfrac{\pi}{2} + \pi k, y\Big)\Big\}$, $\forall y \in \Big(-\dfrac{\pi}{2} + \pi m, \dfrac{\pi}{2} + \pi m\Big)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, при $a = -1$,

$b = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$; $\varnothing$ при $a = -1$, $b \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, и при

$a \neq -1$, $|(a-1)\cos b| > |a+1|$.

Задача 14. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos y} = a, \\ x + y = b \end{cases} \tag{38}$$

относительно x и y.

Решение. Используем производную пропорции

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$$

для преобразования первого уравнения системы (38):

$$\frac{\sin x}{\cos y} = a \iff \frac{\sin x + \cos y}{\sin x - \cos y} = \frac{a+1}{a-1} \iff$$

$$\iff \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-y}{2}\right)} = \frac{1+a}{1-a} \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x+y}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right) = \frac{1+a}{1-a} \quad \text{при} \quad a \neq 1.$$

Тогда система (38) при $a \neq 1$ равносильна системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{b}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{1+a}{1-a}, \\ x + y = b. \end{cases} \tag{39}$$

Выражение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{b}{2}\right)$ не определено, когда

$$\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \iff b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, при

$$a \neq 1,\ b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

система (38) решений не имеет.

Уравнение

$$\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\Big)=0 \iff \frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}=\pi m \iff b=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ \forall m\in\mathbb{Z}.$$

Поэтому если

$$a=-1,\ \ b=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ \forall m\in\mathbb{Z}, \tag{40}$$

то система (39) равносильна системе

$$\begin{cases} 0\cdot\operatorname{tg}\Big(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-y}{2}\Big)=0,\\ x+y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-y}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi l,\\ x+y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x+y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\\ x-y\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi l \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\\ 2x+\dfrac{\pi}{2}-2\pi m\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi l \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y=-x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\\ x\neq\pi(m+l) \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\\ x\neq\pi p,\ \forall p,l,m\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Следовательно, при выполнении условий (40) множеством решений системы (38) будет множество упорядоченных пар

$$\Big\{\Big(x,\ -x-\frac{\pi}{2}+2\pi m\Big)\Big\},\ \forall m\in\mathbb{Z},\ \forall x\in(\pi p;\pi(p+1)),\ \forall p\in\mathbb{Z}.$$

Если

$$a\neq\pm1,\ \ b=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ \forall m\in\mathbb{Z},$$

то первое уравнение системы (39) решений не имеет, значит, нет решений и у системы (38).

Пусть

$$a\neq1,\ \ b\neq\frac{\pi}{2}+\pi r,\ \forall r\in\mathbb{Z}.$$

Тогда система (39) равносильна системе

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\Big(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-y}{2}\Big)=\dfrac{1+a}{1-a}\operatorname{ctg}\Big(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{b}{2}\Big), \\ x+y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-y}{2}=A+\pi n, \\ x+y=b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\,-\dfrac{\pi}{2}+2A+2\pi n, \\ x+y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b}{2}-\dfrac{\pi}{4}+A+\pi n, \\ y=\dfrac{b}{2}+\dfrac{\pi}{4}-A-\pi n,\ \forall n\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

где $A=\operatorname{arctg}\Big(\dfrac{1+a}{1-a}\,\operatorname{ctg}\Big(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{b}{2}\Big)\Big)$.

При $a=1$ система (38) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos y}=1, \\ x+y=b \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\sin x-\cos y}{\cos y}=0, \\ x+y=b \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{\cos\Big(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x+y}{2}\Big)\cos\Big(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-y}{2}\Big)}{\cos y}=0, \\ x+y=b \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{\cos\Big(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{b}{2}\Big)\cos\Big(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x-y}{2}\Big)}{\cos y}=0, \\ x+y=b. \end{cases} \qquad (41)$$

Уравнения

$$\cos\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{b}{2}\Big)=0 \iff b=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$$

$$\cos y=0 \iff y=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ \forall l\in\mathbb{Z}.$$

Если $b=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \forall k\in\mathbb{Z},$ то система (41) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos y \neq 0, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \iff \begin{cases} y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l, \ \forall l \in \mathbb{Z}, \\ x = \ - y + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Следовательно, при

$$a = 1, \ \ b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (38) является множество

$$\Big\{\Big(- y + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ y\Big)\Big\}, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ y \in \Big(- \frac{\pi}{2} + \pi l; \frac{\pi}{2} + \pi l\Big), \ \forall l \in \mathbb{Z}.$$

Если $b \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \forall k \in \mathbb{Z},$ то система (41) равносильна системе

$$\begin{cases} \cos\Big(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x - y}{2}\Big) = 0, \\ x + y = b, \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x + y = b, \\ \cos y \neq 0, \end{cases}$$

и ее решениями будут

$$x = \frac{b}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n, \ \ y = \frac{b}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

при $y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l, \ \forall l \in \mathbb{Z}.$

Уравнение

$$\frac{b}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi n = \frac{\pi}{2} + \pi l \iff b = \frac{3\pi}{2} + 2\pi(l + n) \iff$$

$$\iff b = \ - \frac{\pi}{2} + 2\pi q, \ \forall l, n, q \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, если

$$b = \ - \frac{\pi}{2} + 2\pi q, \ \forall q \in \mathbb{Z},$$

то система (41) решений не имеет, а если

$$b \neq \frac{\pi}{2} + \pi s,\ \forall s \in \mathbb{Z},$$

то множество

$$\left\{\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{b}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi n\right)\right\},\ \forall n \in \mathbb{Z} \tag{42}$$

является множеством решений системы (41).

Таким образом, при

$$a = 1,\ \ b = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

у системы (38) нет решений, а при

$$a = 1,\ \ b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

множеством решений системы (38) является множество (42).

Ответ: $\left\{\left(x,\ -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right\}$, $\forall x \in (\pi m; \pi(m+1))$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, при $a = -1$, $b = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$; $\left\{\left(-y + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, y\right)\right\}$, $\forall y \in$ $\in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi m; \frac{\pi}{2} + \pi m\right)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, при $a = 1$, $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$; $\left\{\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{b}{2} - \frac{\pi}{4} - \pi n\right)\right\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, при $a = 1$, $b \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$; $\left\{\left(\frac{b}{2} - \frac{\pi}{4} + A + \pi n, \frac{b}{2} + \frac{\pi}{4} - A - \pi n\right)\right\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, при $a \neq 1$, $b \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $A = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)\right)$; $\varnothing$ при $a = 1$, $b = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, при $a \neq 1$, $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и при $a \neq \pm 1$, $b = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Задача 15. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \cos x \sin y = b \end{cases} \tag{43}$$

относительно x и y.

Решение. Почленно складывая и вычитая уравнения системы (43), приводим ее к равносильной системе

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos x = a + b, \\ \sin x \cos y - \sin y \cos x = a - b \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(x+y) = a + b, \\ \sin(x-y) = a - b. \end{cases}$$

Поскольку $|\sin\alpha| \leqslant 1,\ \forall\alpha \in \mathbb{R},$ то

$$\text{при} \quad |a+b| > 1 \quad \text{и при} \quad |a-b| > 1$$

система (43) решений не имеет.

Если

$$|a+b| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |a-b| \leqslant 1,$$

то система (43) равносильна системе

$$\begin{cases} x + y = (-1)^k A + \pi k, \\ x - y = (-1)^m B + \pi m \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\big((-1)^k \cdot A + (-1)^m \cdot B + \pi(k+m)\big), \\ y = \dfrac{1}{2}\big((-1)^k \cdot A + (-1)^{m+1} \cdot B + \pi(k-m)\big),\ \forall k, m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

где $A = \arcsin(a+b),\ B = \arcsin(a-b).$

Ответ: $\varnothing$ при $|a+b| > 1$ и при $|a-b| > 1$;

$$\left\{\left(\frac{(-1)^k A + (-1)^m B + \pi(k+m)}{2}, \frac{(-1)^k A + (-1)^{m+1} B + \pi(k-m)}{2}\right)\right\},$$

$\forall k, m \in \mathbb{Z},\ A = \arcsin(a+b),\ B = \arcsin(a-b).$

Задача 16. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = c, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = e \end{cases} \tag{44}$$

относительно x и y.

Решение. Тригонометрическую систему (44) подстановкой

$$\sin x = u, \ \ \sin y = v$$

приводим к алгебраической системе

$$\begin{cases} u+v=c, \\ u^2+v^2=e \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=c, \\ u^2+2uv+v^2=e+2uv \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} u+v=c, \\ (u+v)^2=e+2uv \end{cases} \iff \begin{cases} u+v=c, \\ uv=\dfrac{c^2-e}{2}. \end{cases} \qquad (45)$$

По обратной теореме Виета u и v являются корнями приведенного квадратного уравнения

$$z^2-cz+\frac{c^2-e}{2}=0,$$

равными

$$z_1=\frac{c-\sqrt{2e-c^2}}{2} \quad \text{и} \quad z_2=\frac{c+\sqrt{2e-c^2}}{2}.$$

Поэтому решениями алгебраической системы (45) будут

$$u=z_1, \ v=z_2 \quad \text{и} \quad u=z_2, \ v=z_1$$

при $2e-c^2 \geqslant 0$.

Если же $2e-c^2<0$, то у системы (45) решений нет.

Итак, при $2e-c^2<0$ система (44) решений не имеет.

Если $2e-c^2 \geqslant 0$, то алгебраическая система (45) имеет указанные решения.

Учитывая выполненную подстановку, устанавливаем, что

$$\text{при} \ \ \left|c-\sqrt{2e-c^2}\,\right|>2 \ \ \text{и при} \ \ \left|c+\sqrt{2e-c^2}\,\right|>2$$

система (44) решений не имеет, поскольку нарушаются условия

$$|\sin x| \leqslant 1 \quad \text{или} \quad |\sin y| \leqslant 1.$$

Если же

$$\left|c-\sqrt{2e-c^2}\,\right| \leqslant 2 \quad \text{и} \quad \left|c+\sqrt{2e-c^2}\,\right| \leqslant 2,$$

то система (44) равносильна совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x = z_1,\\ \sin y = z_2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x = z_2,\\ \sin y = z_1\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = (-1)^n \cdot \arcsin z_1 + \pi n,\\ y = (-1)^m \cdot \arcsin z_2 + \pi m,\end{cases}\\ \begin{cases}x = (-1)^n \cdot \arcsin z_2 + \pi n,\\ y = (-1)^m \cdot \arcsin z_1 + \pi m, \ \forall n, m \in \mathbb{Z}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ:

$\{((-1)^n \cdot \arcsin z_1 + \pi n, (-1)^m \cdot \arcsin z_2 + \pi m), ((-1)^n \cdot \arcsin z_2 + \pi n, (-1)^m \cdot \arcsin z_1 + \pi m)\}, \forall n, m \in \mathbb{Z},$ при $2e - c^2 \geqslant 0, \left|c - \sqrt{2e - c^2}\,\right| \leqslant 2,$ $\left|c + \sqrt{2e - c^2}\,\right| \leqslant 2,$ где $z_1 = \dfrac{1}{2}\left(c - \sqrt{2e - c^2}\,\right),$ $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(c + \sqrt{2e - c^2}\,\right);$ $\varnothing$ при $2e - c^2 < 0,$ при $2e - c^2 \geqslant 0,$ $\left|c - \sqrt{2e - c^2}\,\right| > 2$ и при $2e - c^2 \geqslant 0,$ $\left|c + \sqrt{2e - c^2}\,\right| > 2.$

Задача 17. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sin x + \cos y = w,\\ \sin^2 x + \sin^2 y = z\end{cases} \tag{46}$$

относительно x и y.

Решение. Система

$$\begin{cases}\sin x + \cos y = w,\\ \sin^2 x + \sin^2 y = z\end{cases} \iff \begin{cases}\sin x + \cos y = w,\\ \sin^2 x - \cos^2 y = z - 1\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}\sin x + \cos y = w,\\ w(\sin x - \cos y) = z - 1.\end{cases} \tag{47}$$

Если $w = 0, z \neq 1,$ то второе уравнение системы (47) не имеет смысла, а значит, при

$$w = 0, \ z \neq 1$$

у системы (46) нет решений.

Если $w = 0, z = 1,$ то систему (47) приводим к уравнению

$$\sin x + \cos y = 0 \iff \sin x = -\cos y \iff x = -\frac{\pi}{2} \pm y + 2\pi n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому при

$$w = 0,\ z = 1$$

множеством решений системы (46) будет

$$\Big\{\Big(-\frac{\pi}{2} \pm y + 2\pi n, y\Big)\Big\},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Если $w \neq 0$, то система (47) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = w, \\ \sin x - \cos y = \dfrac{z-1}{w} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = \dfrac{w^2+z-1}{2w}, \\ \cos y = \dfrac{w^2-z+1}{2w}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что система (46) не имеет решений при

$$w \neq 0,\ |w^2+z-1| > 2|w|$$

и при

$$w \neq 0,\ |w^2-z+1| > 2|w|,$$

а при

$$w \neq 0,\ |w^2+z-1| \leqslant 2|w|,\ |w^2-z+1| \leqslant 2|w|$$

множеством решений системы (46) будет множество упорядоченных пар:

$$\Big\{\Big((-1)^n \arcsin\frac{w^2+z-1}{2w} + \pi n, \pm\arccos\frac{w^2-z+1}{2w} + 2\pi k\Big)\Big\}, \forall n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\Big\{\Big(-\dfrac{\pi}{2} \pm y + 2\pi n, y\Big)\Big\}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R}$, при $w = 0, z = 1$;

$$\Big\{\Big((-1)^n \arcsin\frac{w^2+z-1}{2w} + \pi n, \pm\arccos\frac{w^2-z+1}{2w} + 2\pi k\Big)\Big\}, \forall n, k \in \mathbb{Z},$$

при $w \neq 0$, $|w^2+z-1| \leqslant 2|w|$, $|w^2-z+1| \leqslant 2|w|$;

$\varnothing$ при $w = 0, z \neq 1$, при $w \neq 0$, $|w^2+z-1| > 2|w|$ и при $w \neq 0$, $|w^2-z+1| > 2|w|$.

Задача 18. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = r, \\ \cos x \cos y = s \end{cases} \tag{48}$$

относительно x и y.

Решение. Поскольку

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\,,$$

а

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y)+\cos(x-y)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 - 2\sin^2\frac{x+y}{2} + 2\cos^2\frac{x-y}{2} - 1\Big) = \cos^2\frac{x-y}{2} - \sin^2\frac{x+y}{2}\,,$$

то система (48) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{r}{2}\,, \\ \cos^2\dfrac{x-y}{2} - \sin^2\dfrac{x+y}{2} = s. \end{cases}$$

Эта система подстановкой

$$\sin\frac{x+y}{2} = u,\ \ \cos\frac{x-y}{2} = v \tag{49}$$

приводится к алгебраической системе

$$\begin{cases} uv = \dfrac{r}{2}\,, \\ v^2 - u^2 = s. \end{cases} \tag{50}$$

Далее будем рассматривать логические возможности в зависимости от параметров r и s.

Если $r = 0$, то система (50) будет иметь вид:

$$\begin{cases} uv = 0, \\ v^2 - u^2 = s \end{cases}$$

и будет равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=0,\\ v^2=s,\end{cases}\\ \begin{cases}v=0,\\ u^2=-s\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=0,\\ v=\pm\sqrt{s},\end{cases}\\ \begin{cases}v=0,\\ u=\pm\sqrt{-s}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отсюда с учетом подстановки (49) получаем, что при $r=0,\ s\geqslant 0$ система (48) равносильна системе

$$\begin{cases}\sin\dfrac{x+y}{2}=0,\\ \cos\dfrac{x-y}{2}=\pm\sqrt{s}.\end{cases} \qquad (51)$$

Поскольку

$$|\pm\sqrt{s}\,|>1 \iff s>1,$$

то при $s>1$ система (51) решений не имеет.

Поэтому при $r=0,\ s>1$ у системы (48) нет решений.

Если $r=0,\ 0\leqslant s\leqslant 1,$ то система (48) равносильна совокупности четырех систем:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\pi n,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=\arccos\sqrt{s}+2\pi k\end{cases} \iff \begin{cases}x=\arccos\sqrt{s}+\pi(n+2k),\\ y=-\arccos\sqrt{s}+\pi(n-2k);\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\pi n,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=-\arccos\sqrt{s}+2\pi k\end{cases} \iff \begin{cases}x=-\arccos\sqrt{s}+\pi(n+2k),\\ y=\arccos\sqrt{s}+\pi(n-2k);\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\pi n,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=\pi-\arccos\sqrt{s}+2\pi k\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}x=-\arccos\sqrt{s}+\pi(n+2k+1),\\ y=\arccos\sqrt{s}+\pi(n-2k-1);\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\pi n, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=-\pi+\arccos\sqrt{s}+2\pi k \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\arccos\sqrt{s}+\pi(n+2k-1), \\ y=-\arccos\sqrt{s}+\pi(n-2k+1), \end{array}\right.$$

где k и n — любые целые числа.

Если $r=0,\ s<0,$ то система (48) равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\dfrac{x+y}{2}=\pm\sqrt{-s}, \\ \cos\dfrac{x-y}{2}=0. \end{array}\right. \tag{52}$$

Поскольку

$$|\pm\sqrt{-s}\,|>1 \iff -s>1 \iff s<-1,$$

то при $s<-1$ система (52) решений не имеет.

Следовательно, при $r=0,\ s<-1$ у системы (48) решений нет.

При $r=0,\ -1\leqslant s<0$ на основании системы (52) тригонометрическую систему (48) приводим к совокупности двух систем:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=(-1)^n\cdot\arcsin\sqrt{-s}+\pi n, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi m, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=(-1)^n\cdot\arcsin\sqrt{-s}+\dfrac{\pi}{2}\,(2n+2m+1), \\ y=(-1)^n\cdot\arcsin\sqrt{-s}+\dfrac{\pi}{2}\,(2n-2m-1),\ \forall n,m\in\mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=(-1)^{n+1}\cdot\arcsin\sqrt{-s}+\pi n, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi m \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin\sqrt{-s} + \dfrac{\pi}{2}\,(2n + 2m + 1), \\ y = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin\sqrt{-s} + \dfrac{\pi}{2}\,(2n - 2m - 1), \ \forall n, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Пусть $r \neq 0$. Тогда, выражая из первого уравнения системы (50) переменную v через u и подставляя

$$v = \frac{r}{2u}$$

во второе уравнение системы (50), получаем:

$$\frac{r^2}{4u^2} - u^2 = s \iff 4u^4 + 4su^2 - r^2 = 0 \iff$$

$$\iff (2u^2 + s)^2 - (r^2 + s^2) = 0 \iff u^2 = \frac{-s \pm \sqrt{r^2 + s^2}}{2},$$

считая $r \neq 0$.

Поскольку

$$-s - \sqrt{r^2 + s^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow -s \geqslant \sqrt{r^2 + s^2} \Leftrightarrow \begin{cases} s \leqslant 0, \\ s^2 \geqslant r^2 + s^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s \leqslant 0, \\ r = 0, \end{cases}$$

$$-s + \sqrt{r^2 + s^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow s \geqslant \sqrt{r^2 + s^2} \Leftrightarrow \begin{cases} s \geqslant 0, \\ s^2 \geqslant r^2 + s^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s \geqslant 0, \\ r = 0, \end{cases}$$

то корнями будут

$$u = u_1 \quad \text{и} \quad u = -u_1, \quad \text{где } u_1 = \sqrt{\frac{-s + \sqrt{r^2 + s^2}}{2}},$$

причем $u_1 \neq 0$.

Поэтому при $r \neq 0$ решениями системы (50) будут

$$u = u_1,\ v = v_1 \quad \text{и} \quad u = -u_1,\ v = -v_1, \quad \text{где } v_1 = \frac{r}{2u_1}.$$

Учитывая вид подстановки (49), при которой $|u| \leqslant 1$ и $|v| \leqslant 1$, приходим к следующему заключению относительно данной системы.

Если

$$u_1 > 1 \quad \text{или} \quad 2u_1 < |r|,$$

то при $r \neq 0$ система (48) решений не имеет.

Если

$$r \neq 0, \ \ \frac{|r|}{2} \leqslant u_1 \leqslant 1,$$

то система (48) равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = (-1)^n \cdot \arcsin u_1 + \pi n, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = \arccos v_1 + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = (-1)^n \cdot \arcsin u_1 + \pi n, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = -\arccos v_1 + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin u_1 + \pi n, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = \pi - \arccos v_1 + 2\pi k, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin u_1 + \pi n, \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} = -\pi + \arccos v_1 + 2\pi k \end{cases} \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = (-1)^n \cdot \arcsin u_1 + \arccos v_1 + \pi(n + 2k), \\ y = (-1)^n \cdot \arcsin u_1 - \arccos v_1 + \pi(n - 2k), \end{cases} \\ \begin{cases} x = (-1)^n \cdot \arcsin u_1 - \arccos v_1 + \pi(n + 2k), \\ y = (-1)^n \cdot \arcsin u_1 + \arccos v_1 + \pi(n - 2k), \end{cases} \\ \begin{cases} x = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin u_1 - \arccos v_1 + \pi(n + 2k + 1), \\ y = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin u_1 + \arccos v_1 + \pi(n - 2k - 1), \end{cases} \\ \begin{cases} x = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin u_1 + \arccos v_1 + \pi(n + 2k - 1), \\ y = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin u_1 + \arccos v_1 + \pi(n - 2k + 1), \forall k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(\arccos\sqrt{s}+\pi(n+2k), -\arccos\sqrt{s}+\pi(n-2k)),$ $(-\arccos\sqrt{s}+\pi(n+2k), \arccos\sqrt{s}+\pi(n-2k)), (-\arccos\sqrt{s}+\pi(n+2k+1),$ $\arccos\sqrt{s}+\pi(n-2k-1)), (\arccos\sqrt{s}+\pi(n+2k-1), -\arccos\sqrt{s}+\pi(n-$ $-2k+1))\}$ при $r=0,\ 0\leqslant s\leqslant 1$; $\Big\{\Big(\dfrac{\pi}{2}+(-1)^n\cdot\arcsin\sqrt{-s}+\pi(n+m),$ $-\dfrac{\pi}{2}+(-1)^n\cdot\arcsin\sqrt{-s}+\pi(n-m)\Big), \Big(\dfrac{\pi}{2}+(-1)^{n+1}\cdot\arcsin\sqrt{-s}+$ $+\pi(n+m), -\dfrac{\pi}{2}+(-1)^{n+1}\cdot\arcsin\sqrt{-s}+\pi(n-m)\Big)\Big\}$ при $r=0,$ $-1\leqslant s\leqslant 0$; $\{((-1)^n\cdot\arcsin u_1+\arccos v_1+\pi(n+2k), (-1)^n\cdot\arcsin u_1-$ $-\arccos v_1+\pi(n-2k)), ((-1)^n\cdot\arcsin u_1-\arccos v_1+\pi(n+2k),$ $(-1)^n\cdot\arcsin u_1+\arccos v_1+\pi(n-2k)), ((-1)^{n+1}\cdot\arcsin u_1-\arccos v_1+$ $+\pi(n+2k+1)), ((-1)^{n+1}\cdot\arcsin u_1+\arccos v_1+\pi(n-2k-1)),$ $((-1)^{n+1}\cdot\arcsin u_1+\arccos v_1+\pi(n+2k-1), (-1)^{n+1}\cdot\arcsin u_1+$ $+\arccos v_1+\pi(n-2k+1))\}$ при $r\neq 0,\ \dfrac{|r|}{2}\leqslant u_1\leqslant 1$, где $n,m,k\in\mathbb{Z}$, $\sqrt{2}\,u_1=\sqrt{-s+\sqrt{r^2+s^2}},\ v_1=\dfrac{r}{2u_1}$; $\varnothing$ при $r=0,\ |s|>1$, при $r\neq 0,\ u_1>1$ и при $r\neq 0,\ 2u_1<|r|$.

Задача 19. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=a,\\ \cos x+\cos y=b \end{cases} \tag{53}$$

относительно x и y.

Решение. Система (53) равносильна системе

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a}{2},\\[2mm] \cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{b}{2}. \end{cases} \tag{54}$$

Если $a=b=0$, то система (54) будет иметь вид:

$$
\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=0, \\ \cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=0 \end{cases} \iff \cos\dfrac{x-y}{2}=0 \iff
$$

$$
\iff x-y=\pi+2\pi n \iff y=x-\pi+2\pi m,\ m=-n,\ \forall n\in\mathbb{Z},
$$

так как не существует такого действительного α, что $\sin\alpha=\cos\alpha=0$.

Если

$$
a\neq 0,\ \ b=0,
$$

то система (54) будет иметь вид:

$$
\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a}{2}, \\ \cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2}=0, \\ \sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a}{2} \end{cases} \iff
$$

$$
\iff \begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \\ \sin\Big(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\Big)\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=\pi+2\pi n, \\ \cos\dfrac{x-y}{2}=(-1)^n\cdot\dfrac{a}{2} \end{cases}
$$

при любом $n\in\mathbb{Z}$.

Если $|a|>2$, то полученная система решений не имеет.

Поэтому при $|a|>2,\ b=0$ у системы (53) решений нет.

Если

$$
|a|\leqslant 2,\ \ a\neq 0,\ \ b=0,
$$

то система (53) будет иметь вид:

$$
\begin{cases} x+y=\pi+2\pi n, \\ x-y=\pm 2\arccos\Big((-1)^n\cdot\dfrac{a}{2}\Big)+4\pi k \end{cases}
$$

и будет равносильна совокупности двух систем:

$$
\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+\arccos\Big((-1)^n\cdot\dfrac{a}{2}\Big)+\pi(n+2k), \\ y=\dfrac{\pi}{2}-\arccos\Big((-1)^n\cdot\dfrac{a}{2}\Big)+\pi(n-2k); \end{cases}
$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\Big((- 1)^n \cdot \dfrac{a}{2}\Big) + \pi(n + 2k), \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \arccos\Big((- 1)^n \cdot \dfrac{a}{2}\Big) + \pi(n - 2k), \ \forall k, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Если $b \neq 0$, то возможно почленное деление первого уравнения системы (54) на второе, в результате получим равносильную систему

$$\begin{cases} \sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{a}{2}\,, \\ \operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{a}{b} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b} + \pi n, \\ \sin\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2} = (- 1)^n \cdot \dfrac{a}{2}\,, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad (55)$$

Если $a = 0$, то второе уравнение системы (55) совместно при любых действительных x и y, а сама система (55) равносильна ее первому уравнению.

Поэтому при

$$a = 0, \ b \neq 0$$

у системы (53) множеством решений будет

$$\{(- y + 2\pi n, y)\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Если $a \neq 0$, то систему (55) приводим к виду

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b} + \pi n, \\ \cos\dfrac{x-y}{2} = (- 1)^n \cdot \dfrac{a}{2}\ \sin^{-1}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\,, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отсюда, если

$$|a| > 2\left|\sin\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\right|, \ \ b \neq 0,$$

то система (53) решений не имеет.

Если

$$ab \neq 0, \ \ |a| \leqslant 2\left|\sin\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\right|,$$

то система (53) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}+\pi n, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=\ \pm A+2\pi k \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}+A+\pi(n+2k), \\ y=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}-A+\pi(n-2k), \end{cases} \\ \begin{cases} x=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}-A+\pi(n+2k), \\ y=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}+A+\pi(n-2k),\ \forall k,n\in\mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

где $A=\arccos\Big((-1)^n\cdot\dfrac{a}{2}\,\sin^{-1}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\Big)$.

Ответ: $\varnothing$ при $b=0,\ |a|>2$ и при $|a|>2\left|\sin\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\right|,\ b\neq 0;$ $\{(x,x-\pi+2\pi n)\},\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R},$ при $a=b=0;$ $\{(-y+2\pi n,y)\},$ $\forall n\in\mathbb{Z},\forall y\in\mathbb{R},$ при $a=0,\ b\neq 0;$

$\Big\{\Big(\dfrac{\pi}{2}+\arccos\Big((-1)^n\cdot\dfrac{a}{2}\Big)+\pi(n+2k),\ \dfrac{\pi}{2}-\arccos\Big((-1)^n\cdot\dfrac{a}{2}\Big)+$ $+\pi(n-2k)\Big),\ \Big(\dfrac{\pi}{2}-\arccos\Big((-1)^n\cdot\dfrac{a}{2}\Big)+\pi(n+2k),\ \dfrac{\pi}{2}+$ $+\arccos\Big((-1)^n\cdot\dfrac{a}{2}\Big)+\pi(n-2k)\Big)\Big\},\forall k,n\in\mathbb{Z},$ при $a\neq 0,|a|\leqslant 2,b=0;$

$\Big\{\Big(\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}+A+\pi(n+2k),\ \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}-A+\pi(n-2k)\Big),\ \Big(\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}-A+$ $+\pi(n+2k),\ \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}+A+\pi(n-2k)\Big)\Big\},\ \forall k,n\in\mathbb{Z},$ при $|a|\leqslant 2\left|\sin\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\right|,\ \ b\neq 0,$ где $A=\arccos\Big((-1)^n\cdot\dfrac{a}{2}\,\sin^{-1}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}\Big)$.

Задача 20. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}\,\sin a, \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2}\,\cos a \end{cases} \tag{56}$$

относительно x и y.

Решение. Преобразованиями получаем:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}\,\sin a, \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2}\,\cos a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\sin x + \sin y)^2 = 2\sin^2 a, \\ (\cos x + \cos y)^2 = 2\cos^2 a \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = 2\sin^2 a + 2\cos^2 a \iff$$

$$\iff \sin x \sin y + \cos x \cos y = 0 \iff \cos(x-y) = 0.$$

Поскольку равенство

$$\cos(x-y) = 0$$

следует из системы (56), то она равносильна системе

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 0, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{2}\,\sin a, \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2}\,\cos a \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{2} + \pi s, \\ \sin\Big(y + \dfrac{\pi}{2} + \pi s\Big) + \sin y = \sqrt{2}\,\sin a, \\ \cos\Big(y + \dfrac{\pi}{2} + \pi s\Big) + \cos y = \sqrt{2}\,\cos a \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{2} + \pi s, \\ (-1)^s \cdot \cos y + \sin y = \sqrt{2}\,\sin a, \\ (-1)^{s+1} \cdot \sin y + \cos y = \sqrt{2}\,\cos a, \ \forall s \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем.

Первая система

$$\begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ \cos y + \sin y = \sqrt{2}\,\sin a, \\ \cos y - \sin y = \sqrt{2}\,\cos a \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ 2\cos y = \sqrt{2}\,\sin a + \sqrt{2}\,\cos a, \\ 2\sin y = \sqrt{2}\,\sin a - \sqrt{2}\,\cos a \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ \cos y = \sin\Big(\dfrac{\pi}{4} + a\Big), \\ \sin y = \, -\cos\Big(\dfrac{\pi}{4} + a\Big) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ \left[\begin{aligned} & y = a + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ & y = \, -a - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \end{aligned}\right. \\ \left[\begin{aligned} & y = a + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ & y = \, -a - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \end{aligned}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ y = a - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x = a + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi(l+n), \\ y = a - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = a + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi p, \\ y = a - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \ \forall k, l, n, p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Вторая система

$$\begin{cases} x = y - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ \sin y - \cos y = \sqrt{2}\,\sin a\,, \\ \sin y + \cos y = \sqrt{2}\,\cos a \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ 2\sin y = \sqrt{2}\,\sin a + \sqrt{2}\,\cos a, \\ 2\cos y = \sqrt{2}\,\cos a - \sqrt{2}\,\sin a \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ \sin y = \sin\Big(\dfrac{\pi}{4} + a\Big), \\ \cos y = \cos\Big(\dfrac{\pi}{4} + a\Big) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ \left[\begin{array}{l} y = a + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ y = \ -a - \dfrac{\pi}{4} + \pi + 2\pi n, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = a + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ y = \ -a - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = y - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, \\ y = a + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi(l+n), \\ y = a + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = a - \dfrac{\pi}{4} + 2\pi p, \\ y = a + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \forall k, l, n, p \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ:

$$\Big\{\Big(a+\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, a-\dfrac{\pi}{4}+2\pi m\Big), \Big(a-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, a+\dfrac{\pi}{4}+2\pi m\Big)\Big\}, \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Задача 21. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (\delta^2-\delta)\sin\dfrac{x}{2}+2\cos y=\delta+5, \\ 3\sin\dfrac{x}{2}+\cos y=4 \end{cases} \tag{57}$$

относительно x и y.

Решение. Уравнение

$$3\sin\frac{x}{2}+\cos y=4 \iff \begin{cases} \sin\dfrac{x}{2}=1, \\ \cos y=1, \end{cases}$$

так как

$$\sin\frac{x}{2}\leqslant 1, \quad \cos y\leqslant 1.$$

Поэтому система (57) равносильна системе

$$\begin{cases} \delta^2-2\delta-3=0, \\ \sin\dfrac{x}{2}=1, \\ \cos y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} (\delta+1)(\delta-3)=0, \\ x=\pi+4\pi n, \\ y=2\pi k,\ \forall k,n\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

и имеет решение при $\delta=-1$ и при $\delta=3$ в виде множества

$$\{(\pi+4\pi n, 2\pi k)\},\ \forall k,n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\{(\pi+4\pi n, 2\pi k)\},\ \forall k,n\in\mathbb{Z}$, при $\delta=-1$ или $\delta=3$;
$\varnothing$ при $\delta\in(-\infty;-1)\cup(-1;3)\cup(3;+\infty)$.

Задача 22. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin\Big(x-\dfrac{\pi}{4}\Big)\cos\Big(y-\dfrac{\pi}{4}\Big)=r, \\ x+y=2\arcsin\Big(r+\dfrac{1}{2}\Big) \end{cases} \tag{58}$$

относительно x и y.

Решение. Задание системы (58) накладывает ограничения на параметр r, связанные с тем, что

$$|\sin\alpha| \leqslant 1, \quad |\cos\beta| \leqslant 1,$$

а $\arcsin\gamma$ существует лишь при $|\gamma| \leqslant 1$.

Поэтому система (58) может иметь решения только при

$$\begin{cases} |r| \leqslant 1, \\ \left|r + \dfrac{1}{2}\right| \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leqslant r \leqslant 1, \\ -1 \leqslant r + \dfrac{1}{2} \leqslant 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -1 \leqslant r \leqslant 1, \\ -\dfrac{3}{2} \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff -1 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}.$$

Если $r \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$, то система (58) решений не имеет.

Пусть $r \in \left[-1; \dfrac{1}{2}\right]$. Тогда первое уравнение системы (58)

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = r \iff$$

$$\iff \sin(x - y) + \sin\left(x + y - \frac{\pi}{2}\right) = 2r \iff$$

$$\iff \sin(x - y) - \cos(x + y) = 2r,$$

а из второго уравнения системы (58) находим, что

$$\cos(x + y) = \cos\left(2\arcsin\left(r + \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= 1 - 2\sin^2\arcsin\left(r + \frac{1}{2}\right) = 1 - 2\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - 2r - 2r^2.$$

Тогда первое уравнение системы (58) можно записать в виде

$$\sin(x - y) = 2r + \left(\frac{1}{2} - 2r - 2r^2\right) \iff \sin(x - y) = \frac{1 - 4r^2}{2}.$$

Следовательно, параметр r должен удовлетворять условиям

$$\begin{cases} -1 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \left|1-4r^2\right| \leqslant 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ -2 \leqslant 1-4r^2 \leqslant 2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -1 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ -3 \leqslant -4r^2 \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{4} \leqslant r^2 \leqslant \dfrac{3}{4} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -1 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ r^2 \leqslant \dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ |r| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -1 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant r \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}.$$

Итак, система (58) при $r \in \left(-\infty;\, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2};\, +\infty\right)$ решений не имеет, а при $r \in \left[\dfrac{-\sqrt{3}}{2};\, \dfrac{1}{2}\right]$ равносильна системе

$$\begin{cases} \sin(x-y) = \dfrac{1-4r^2}{2}, \\ x+y = 2\arcsin\left(r+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x-y = (-1)^n \cdot \arcsin\dfrac{1-4r^2}{2} + \pi n, \\ x+y = 2\arcsin\left(r+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{(-1)^n}{2}\arcsin\dfrac{1-4r^2}{2} + \arcsin\Bigl(r+\dfrac{1}{2}\Bigr) + \dfrac{\pi}{2}n, \\ y = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\dfrac{1-4r^2}{2} + \arcsin\Bigl(r+\dfrac{1}{2}\Bigr) - \dfrac{\pi}{2}n, \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\Bigl\{\Bigl(\dfrac{(-1)^n}{2}\arcsin\dfrac{1-4r^2}{2} + \arcsin\Bigl(r+\dfrac{1}{2}\Bigr) + \dfrac{\pi}{2}n,$

$\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\dfrac{1-4r^2}{2} + \arcsin\Bigl(r+\dfrac{1}{2}\Bigr) - \dfrac{\pi}{2}n\Bigr)\Bigr\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, при

$r \in \Bigl[\dfrac{-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\Bigr]$; $\varnothing$ при $r \in \Bigl(-\infty; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Bigr) \cup \Bigl(\dfrac{1}{2}; +\infty\Bigr)$.

Задача 23. При каких значениях параметра d система уравнений

$$\begin{cases} y = \sin(d+\pi x) + \sin(d-\pi x), \\ 3\sin d = \dfrac{1}{1+y^2}\Bigl(\dfrac{3}{2} + x + \dfrac{1}{2x^2}\Bigr) \end{cases} \tag{59}$$

имеет единственное решение, и оно удовлетворяет условиям

$$1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}, \quad y \leqslant 0\ ?$$

Решение. Система (59) равносильна системе

$$\begin{cases} y = 2\sin d\,\cos\pi x, \\ (4\sin^2 d\cos^2\pi x + 1)\sin d = \dfrac{1}{3}\Bigl(\dfrac{3}{2} + x + \dfrac{1}{2x^2}\Bigr), \end{cases} \tag{60}$$

так как

$$\sin(d+\pi x) + \sin(d-\pi x) = 2\sin d\,\cos\pi x,$$

а значит,

$$1 + y^2 = 1 + 4\sin^2 d\,\cos^2\pi x.$$

Поскольку $\cos\pi x \leqslant 0$ при $x \in \Bigl[1; \dfrac{3}{2}\Bigr]$, то система (60) при

$x \in \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$, $y \in (-\infty; 0]$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\sin d > 0$ и второе уравнение этой системы имеет единственное решение на отрезке $\left[1; \dfrac{3}{2}\right]$.

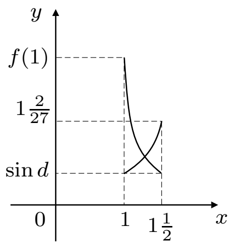


Рис. 1.

Функция

$$f(x) = (4\sin^2 d \cos^2 \pi x + 1)\sin d$$

при возрастании x от 1 до $\dfrac{3}{2}$ убывает от $\sin d + 4\sin^3 d$ до $\sin d$, так как функция $\cos^2 \pi x$ убывает на отрезке $\left[1; \dfrac{3}{2}\right]$ от $\cos^2 \pi = 1$ до $\cos^2 \dfrac{3\pi}{2} = 0$, а значение $\sin d > 0$.

Функция

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + x + \frac{1}{2x^2}\right), \ \forall(-\infty; 0) \cup (0; +\infty),$$

на отрезке $\left[1; \dfrac{3}{2}\right]$ возрастает от $g(1) = 1$ до $g\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{29}{27}$, так как

$$g'(x) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{x^3}\right) = \frac{x^3 - 1}{3x^3} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant 1.$$

Поэтому второе уравнение системы (60) имеет на отрезке $\left[1; \dfrac{3}{2}\right]$ единственное решение тогда и только тогда, когда

$$4\sin^3 d + \sin d \geqslant 1 \iff$$
$$\iff (4\sin^3 d - 2\sin^2 d) + (2\sin^2 d - \sin d) + 2\sin d - 1 \geqslant 0 \iff$$
$$\iff (2\sin d - 1)(2\sin^2 d + \sin d + 1) \geqslant 0 \iff \sin d \geqslant \frac{1}{2}.$$

Здесь учтено, что квадратный трехчлен $2\sin^2 d + \sin d + 1$ относительно $\sin d$ принимает только положительные значения, ибо у него отрицательный дискриминант $D = 1 - 8 = -7$ и положительный первый коэффициент.

На рис. 1 смодулирована описанная ситуация.

Итак, система (59) имеет единственное решение, удовлетворяющее данным условиям, если $\sin d > 0,\ \sin d \geqslant \dfrac{1}{2}$, т.е.

$$\sin d \geqslant \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant d \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant d \leqslant \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$

Задача 24. При каких значениях a и b система уравнений

$$\begin{cases} x^{1998} - 2a\sin\Big(\dfrac{\pi}{2}\cos y\Big) + b^2 = 0, \\ y^{1998} - 2b\cos\Big(\dfrac{\pi}{2}\sin x\Big) + a^2 = 0 \end{cases} \tag{61}$$

имеет единственное решение?

Решение. При замене в системе (61) x на $-x$, а также при замене y на $-y$ всякий раз получаем эту же систему.

Поэтому если упорядоченная пара (x, y) — решение системы (61), то решениями будут $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$.

Значит, если система (61) имеет единственное решение, то таким решением будет $x = 0,\ y = 0$.

При $x = 0,\ y = 0$ система (61) будет иметь вид:

$$\begin{cases} -2a + b^2 = 0, \\ -2b + a^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(b-a) + (b^2 - a^2) = 0, \\ a^2 - 2b = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (b-a)(2+b+a) = 0, \\ a^2 - 2b = 0. \end{cases}$$

Если $b - a = 0$, то $a^2 - 2a = 0$, т.е. $a = 0$ или $a = 2$.

Значит, возможны случаи, когда $a = b = 0$ и когда $a = b = 2$.

Если $2 + a + b = 0$, т.е.

$$b = -(a+2), \quad \text{то} \quad a^2 + 2a + 4 = 0,$$

что не возможно, поскольку у квадратного трехчлена $a^2 + 2a + 4$ дискриминант $D = 4 - 16 = -12 < 0$.

Пусть $a = 0,\ b = 0$. Тогда система (61) будет иметь вид:

$$\begin{cases} x^{1998} = 0, \\ y^{1998} = 0, \end{cases}$$

а ее единственным решением будет $(0,0)$.

Если $a = 2,\ b = 2,$ то система (61) будет иметь вид

$$\begin{cases} x^{1998} - 4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cos y\right) + 4 = 0, \\ y^{1998} - 4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right) + 4 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^{1998} - 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos y\right) + 4 = 0 \iff$$

$$\Leftrightarrow x^{1998} + \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos y\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos y\right) + 4\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos y\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\iff x^{1998} + \left[\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos y\right) - 2\right)^2 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos y\right)\right] = 0.$$

Откуда следует, что $x = 0,$ так как выражение в квадратных скобках неотрицательное.

В самом деле, при любом действительном y из двойного неравенства $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\ \cos y\right) \leqslant 1$ следует, что $0 \leqslant \sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\ \cos y\right) \leqslant 1$ и

$$-3 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}\ \cos y\right) - 2 \leqslant -1 \Longrightarrow 1 \leqslant \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\ \cos y\right) - 2\right)^2 \leqslant 9.$$

Поэтому

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\ \cos y\right) - 2\right)^2 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\ \cos y\right) \geqslant 0,\ \forall y \in \mathbb{R}.$$

При $x = 0$ второе уравнение системы будет иметь вид:

$$y^{1998} - 4 + 4 = 0 \iff y = 0.$$

Следовательно, и при $a = b = 2$ система (61) имеет единственное решение $(0,0)$.

Ответ: при $a = b = 0$ и при $a = b = 2$.

Задача 25. При каких значениях параметра α система

$$\begin{cases} \cos^2 \pi xy + 3\sin^2 \pi x + 6\sin^2 \pi y - \operatorname{tg} 2\pi\alpha = 0, \\ \cos \pi xy - \sin^2 \pi x - 2\sin^2 \pi y + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\pi\alpha = 0, \\ \log_3\Big(1 + 4\cos^2\Big(\dfrac{\pi\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{16}\Big) - x^2 - y^2\Big) \leqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \tag{62}$$

имеет ровно четыре решения ?

Решение. Умножив второе уравнение системы (62) на 2 и сложив с первым, получим

$$\cos^2 \pi xy + 2\cos \pi xy + 1 + \sin^2 \pi x + 2\sin^2 \pi y = 0 \iff$$

$$\iff (\cos \pi xy + 1)^2 + \sin^2 \pi x + 2\sin^2 \pi y = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos \pi xy + 1 = 0, \\ \sin \pi x = 0, \\ \sin \pi y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \pi xy = \pi + 2\pi k, \\ \pi x = \pi l, \\ \pi y = \pi m \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 1 + 2k, \\ x = l, \\ y = m, \end{cases}$$

где k, l, m — целые числа.

При

$$\cos \pi xy = -1, \ \sin \pi x = 0, \ \sin \pi y = 0$$

первое уравнение системы (62) будет иметь вид:

$$\operatorname{tg} 2\pi\alpha = 1 \iff 2\pi\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n \iff \alpha = \frac{1}{8} + \frac{n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

По свойству монотонности логарифмической функции неравенство системы (62) равносильно двойному неравенству

$$0 < 1 + 4\cos^2\Big(\frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi}{16}\Big) - x^2 - y^2 \leqslant \sqrt[3]{3} \iff$$

$$\iff 0 < 1 + 2\Big(1 + \cos\Big(\pi\alpha - \frac{\pi}{8}\Big)\Big) - x^2 - y^2 \leqslant \sqrt[3]{3} \iff$$

$$\iff -3-2\cos\Big(\pi\alpha - \frac{\pi}{8}\Big) < -(x^2+y^2) \leqslant -3-2\cos\Big(\pi\alpha - \frac{\pi}{8}\Big) + \sqrt[3]{3} \iff$$

$$\iff 3 + 2\cos\Big(\pi\alpha - \frac{\pi}{8}\Big) - \sqrt[3]{3} \leqslant x^2 + y^2 < 3 + 2\cos\Big(\pi\alpha - \frac{\pi}{8}\Big).$$

Если $\alpha = \frac{1}{8} + \frac{n}{2}$, то $\cos\left(\pi\alpha - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, и

$$3 + 2\cos\frac{\pi n}{2} - \sqrt[3]{3} \leqslant x^2 + y^2 < 3 + 2\cos\frac{\pi n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, система (62) равносильна системе

$$\begin{cases} x = l, \\ y = m, \\ xy = 1 + 2k, \\ \alpha = \dfrac{1}{8} + \dfrac{n}{2}, \\ 3 + 2\cos\dfrac{\pi n}{2} - \sqrt[3]{3} \leqslant x^2 + y^2 < 3 + 2\cos\dfrac{\pi n}{2}, \end{cases} \tag{63}$$

где k, l, m, n — целые числа.

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $\cos\frac{\pi n}{2}$ может быть равен лишь -1, 0, 1.

Пусть $\cos\frac{\pi n}{2} = -1$. Тогда неравенство системы (63) примет вид:

$$1 - \sqrt[3]{3} \leqslant x^2 + y^2 < 1.$$

Поскольку $1 - \sqrt[3]{3} < 0$, а x и y — целые числа, то $x^2 + y^2 = 0$, что возможно лишь при $x = y = 0$.

Но если $x = y = 0$, то равенство $xy = 1 + 2k$ не выполняется ни при каком целом k.

Итак, если $\cos\frac{\pi n}{2} = -1$, то у системы (63) нет решений.

Пусть $\cos\frac{\pi n}{2} = 0$. Тогда неравенство системы (63) будет иметь вид

$$3 - \sqrt[3]{3} \leqslant x^2 + y^2 < 3,$$

причем

$$1 < \sqrt[3]{3} < 2 \iff -2 < -\sqrt[3]{3} < -1 \iff 1 < 3 - \sqrt[3]{3} < 2.$$

Поскольку x и y — целые числа, то $x^2 + y^2 = 2$, что возможно тогда и только тогда, когда $|l| = 1$ и $|m| = 1$.

Итак, если

$$\cos\frac{\pi n}{2} = 0 \iff \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi p \iff n = 1 + 2p,\ \forall p \in \mathbb{Z},$$

то система (63) будет иметь вид:

$$\begin{cases} |x| = 1, \\ |y| = 1, \\ xy = 1 + 2k, \\ \alpha = \dfrac{5}{8} + p, \end{cases}$$

где k и p — целые числа.

Если $xy = -1$, то из равенства $xy = 1 + 2k$ следует, что $k = -1$, если же $xy = 1$, то $k = 0$.

Следовательно, система (62) имеет ровно четыре решения:

$$(-1, -1),\ (-1, 1),\ (1, -1),\ (1, 1),$$

если $\alpha = \dfrac{5}{8} + p,\ \forall p \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\cos\dfrac{\pi n}{2} = 1$. Тогда неравенство системы (63) примет вид:

$$5 - \sqrt[3]{3} \leqslant x^2 + y^2 < 5,$$

причем $3 < 5 - \sqrt[3]{3} < 4$.

Поскольку x и y — целые числа, то сумма $x^2 + y^2 = 4$, что возможно, если и только если $l = 0,\ |m| = 2$ или $|l| = 2,\ m = 0$.

Если $x = 0,\ |y| = 2$ или $|x| = 2,\ y = 0$, то равенство $xy = 1 + 2k$ всякий раз будет иметь вид $1 + 2k = 0$ и не выполняется ни при каком целом k.

Итак, если $\cos\dfrac{\pi n}{2} = 1$, то у системы (63) нет решений.

Ответ: $\alpha = \dfrac{5}{8} + p,\ \forall p \in \mathbb{Z}$.

Литература

1. *Бескин Н.М.* Задачник-практикум по тригонометрии. М.: ГУПИ, 1962.

2. *Бородуля И.Т.* Тригонометрические уравнения и неравенства. М.: Просвящение, 1989.

3. *Василевский А.Б.* Обучение решению задач по математике. Мн.: Вышэйшая школа, 1988.

4. *Ваховский Е.Б., Рывкин А.А.* Задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1971.

5. *Горбузов В.Н.* Тригонометрические системы. Ч. 1, 2. Гродно: ГрГУ, 1990.

6. *Горбузов В.Н.* Тригонометрический справочник. Гродно: ГрГУ, 1990.

7. Задачи вступительных экзаменов по математике/ Ю.В. Нестеренко и др. М.: Наука, 1986.

8. Задачи по математике, предлагавшиеся в вузах на вступительных экзаменах (с решениями)/ И.М. Ангилейко и др. Мн.: Вышэйшая школа, 1976.

9. Квант. М.: Наука, 1984. № 2; 1987. № 11; 1988. №№ 1, 6; 1989. №№ 2, 5.

10. *Крамор В.С., Михайлов П.А.* Тригонометрические функции. М.: Просвещение, 1983.

11. *Кушнир И.А.* Неравенства. Задачи и решения. Киев: Астарта, 1996.

12. Лекции и задачи по элементарной математике/ В.Г. Болтянский и др. М.: Наука, 1974.

13. *Мазур К.И.* Решебник всех конкурсных задач по математике сборника под редакцией М.И.Сканави. Вып. 3. Тригонометрические уравнения. Неравенства. Киев: Украинская энциклопедия, 1994.

14. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных/ Кравцев С.В. и др. М.: Экзамен, 2001.

15. Методы решения уравнений и неравенств с параметрами/ В.Н. Горбузов и др. Гродно: ГрГУ, 1998.

16. *Моденов П.С.* Экзаменационные задачи по математике с анализом их решения. М.: Просвещение, 1969.

17. *Назаретов А.П., Пигарев Б.П.* Математика. М.: РИПОЛ КЛАССИК, 1999.

18. *Панчишкин А.А., Шавгулидзе Е.Т.* Тригонометрические функции в задачах. М.: Наука, 1986.

19. Повторим математику/ Э.З. Шувалова и др. М.: Высшая школа, 1974.

20. Пособие по математике для поступающих в вузы/ Б.И. Александров и др. М.: МГУ, 1972.

21. Пособие по математике для поступающих в вузы. Избранные вопросы элементарной математики/ Г.В. Дорофеев и др. М.: Наука, 1972.

22. Пособие по математике для поступающих в вузы/ Под ред. Г.Н. Яковлева. М.: Наука, 1988.

23. Сборник задач по математике для поступающих во втузы/ Под ред. М.И. Сканави. М.: Высшая школа, 1988.

24. Сборник конкурсных задач по математике с методическими указаниями и решениями/ Под ред. А.И. Прилепко. М.: Наука, 1986.

25. Сборник экзаменационных материалов по математике за курс средней школы. Мн.: Жасскон, 1999, 2001.

26. *Сивашинский И.Х.* Неравенства в задачах. М.: Наука, 1967.

27. Тригонометрия: Задачник по школьному курсу/ А.Г. Мерзеляк и др. М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998.

28. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа/ М.Л. Галицкий и др. М.: Просвещение, 1986.

29. *Цыпкин А.Г., Пинский А.И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы/ Под ред. В.И. Благодатских. М.: Наука, 1983.

30. Элементарная математика. Повторительный курс/ В.В. Зайцев и др. М.: Наука, 1974.

Содержание

Введение 3
§ 1. Метод исключения переменной 8
§ 2. Метод подстановки (замены переменных) 35
§ 3. Тригонометрические системы специальных видов 57
1. Системы, в которых одно уравнение алгебраическое, а другое содержит тригонометрические функции 57
2. Системы, в которых оба уравнения содержат тригонометрические функции 80
§ 4. Решения тригонометрических систем, удовлетворяющие заданным условиям 106
§ 5. Нестандартные решения систем, содержащих тригонометрические функции 126
§ 6. Тригонометрические системы с параметрами 153
Литература 219

Гнездовский Юрий Юрьевич,
Горбузов Виктор Николаевич

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ