УДК 004.7

Н. В. ЧЕРНАЯ, М. А. МАТАЛЬЫЦКИЙ

О МЕТОДАХ НАХОЖДЕНИЯ ДОХОДОВ В НМ-СЕТЯХ С ЗАВИСИМЫМИ ОТ ВРЕМЕНИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАЯВОК

1. Введение. Рассмотрим НМ (Howard-Matalytski) – сеть произвольной структуры с однотипными заявками, состоящую из n систем обслуживания (СМО) $S_1, S_2, ..., S_n$. Заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней системе некоторый доход и соответственно доход первой системы уменьшается на эту величину [1]. Рассмотрим случай, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от состояний сети и времени, а СМО сети являются однолинейными. Предполагается, что параметры обслуживания заявок в СМО, зависят от времени, т.е. если в момент времени t на обслуживании в i-ой СМО находится заявка, то в интервале $[t; t+\Delta t]$ ее обслуживание закончится с вероятностью $\mu_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1,n}$.

В работе представлены методы нахождения ожидаемых доходов систем сети за время t при условии, что нам известны их доходы в начальный момент времени. Примеры использования НМ-сетей при прогнозировании доходов от межбанковских платежей в банковских сетях, сети Интернет, страховых компаниях, логистических транспортных системах, расходов на содержание гибкого вычислительного кластера описаны в [1].

2. Ожидаемые доходы систем сети. Обозначим через $v_i(k,t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k; $r_i(k)$ – доход системы S_i в единицу времени, когда сеть находится в состоянии k; I_i – вектор размерности n с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером i, которая равна 1; $r_{0i}(k+I_i,t)$ - доход системы S_i, когда сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_i, t+\Delta t)$ за время Δt; $-R_{i0}(k-I_i, t+\Delta t)$ – доход этой системы, если сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k-I_i, t+\Delta t)$; $r_{ij}(k+I_i-I_j, t+\Delta t)$ – доход системы S_i, (расход или убыток системы S_j), когда сеть изменяет свое состояние из (k,t) на $(k+I_i-I_j, t+\Delta t)$ за время Δt, $i,j=\overline{1,n}$.

Пусть сеть находится в состоянии (k,t). В течение интервала времени Δt она может остаться в состоянии k или перейти в состояния $(k-I_i), (k+I_i), (k+I_i-I_j)$, $i,j=\overline{1,n}$. Если сеть остается в состоянии $(k, t+\Delta t)$, то ожидаемый доход системы S_i составит $r_i(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_i(k,t)$, который она получит за оставшиеся t единиц времени. Вероятность такого события равна $1-(\lambda+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)u(k_j))\Delta t + o(\Delta t)$, где $u(x)=\begin{cases}1, x\geq 0,\\ 0, x<0,\end{cases}$ – функция Хевисайда. Если же сеть перейдет в состояние $(k+I_i, t+\Delta t)$ с вероятностью $\lambda p_{0i}\Delta t + o(\Delta t)$, то доход системы S_i составит $[r_{0i}(k+I_i,t)+v_i(k+I_i,t)]$, а если в состояние $(k-I_i, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_i(t)u(k_i)p_{oi}\Delta t + o(\Delta t)$, то доход этой системы составит $[-R_{0i}(k-I_i,t)+v_i(k-I_i,t)]$, $i=\overline{1,n}$. Аналогично, если сеть переходит из состояния (k,t) в состояние $(k+I_i-I_j, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_j(t)u(k_j)p_{ji}\Delta t + o(\Delta t)$, она приносит системе S_i доход в размере $r_{ij}(k+I_i-I_j,t)$ плюс ожидаемый доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было состояние $(k+I_i-I_j,t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности для математического ожидания, для ожидаемого дохода системы S_i получаем систему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\frac{dv_i(k,t)}{dt} = -[\lambda + \sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)u(k_j)]v_i(k,t) + \sum_{j=1}^{n}[\lambda p_{0j}v_i(k+I_j,t) + \mu_j(t)u(k_j)p_{j0}v_i(k-I_j,t)] +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[\mu_j(t)u(k_j)p_{ji}v_i(k+I_i-I_j,t) + \mu_i(t)u(k_i)p_{ij}v_i(k-I_i+I_j,t)] +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[\mu_j(t)u(k_j)p_{ji}r_{ij}(k+I_i-I_j,t) + \mu_i(t)u(k_i)p_{ij}r_{ij}(k-I_i+I_j,t)] +$$

$$+\sum_{\substack{c,s=1\\ c,s\neq i}}^{n}\mu_s(t)u(k_s)p_{sc}\nu_i(k+I_c-I_s,t)+\lambda p_{0i}r_{0i}(k+I_i,t)-\mu_i(t)u(k_i)p_{i0}R_{0i}(k-I_i,t)+r_i(k)\,. \qquad (1)$$

Число уравнений в этой системе равно числу состояний сети.

Для замкнутых сетей система уравнений (1) может быть сведена к системе конечного числа линейных неоднородных ДУ, которая в матричной форме может быть записана в виде

$$\frac{dV_i(t)}{dt}=Q_i(t)+A(t)V_i(t)\,,\ i=\overline{1,n}\,, \qquad (2)$$

где $V_i^T(t)=\left(v_i(1,t),K\,,v_i(l,t)\right)$ – вектор доходов системы S_i, l - число состояний сети.

3. О методах решения системы (2). Решение системы (2) можно найти, используя метод преобразований Лапласа. Пусть $U_i(s)$, $G_i(s)$, $W(s)$ – вектора преобразований Лапласа функций $v_i(j,t)$, $Q_i(t)$, $A(t)$, $i=\overline{1,l}$ соответственно. Тогда $sU_i(s)-V_i(0)=G_i(s)+f_i(W(s),U_i(s))$. Решая это функциональное уравнение относительно $U_i(s)$, получим:

$$U_i(s)=F_i\ (G_i(s),W(s)),\ i=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Взяв обратное преобразование Лапласа от обеих частей равенства (3), можно найти функции $v_i(j,t),\ i=\overline{1,l}.$

Пример 1. Рассмотрим метод преобразований Лапласа на примере замкнутой сети небольшой размерности. Пусть имеется сеть со следующими параметрами: $n=2$, число заявок в сети $K=2$, и матрицей вероятностей переходов заявок между СМО сети:

$$P=\left\|p_{ij}\right\|_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Интенсивности обслуживания задаются функциями $\mu_1(t)=at,\ \ \mu_2(t)=e^{t-b}$. Поскольку сеть замкнута, то число ее состояний равно $l=C_{n+K-1}^{n-1}=3$, это будут состояния (0,2), (1,1), (2,0). Переобозначим их соответственно 1, 2, 3. Предположим, что доходы $r(k,t)$, $R(k,t)$ не зависят от времени и равны $r(1)=6,\ \ r(2)=4,\ \ r(3)=3,\ \ R(1)=2,\ \ R(2)=1,\ \ R(3)=5.$ Система (2) в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} v_1^{'}(1,t)=3-4e^{t-b}-2e^{t-b}tv_1(1,t)+5e^{t-b}tv_1(2,t),\\ v_1^{'}(2,t)=1-2e^{t-b}+6at+atv_1(1,t)+(-e^{t-b}-at)v_1(2,t)+3e^{t-b}v_1(3,t),\\ v_1^{'}(1,t)=6+2at+atv_1(2,t)-2atv_1(3,t).\end{cases}$$

Зададим для нее вектор начальных условий:

$$V(0)=(34,25,10)\,.$$

Вектора $Q_1(t),\ Q_2(t)$, матрица $A(t)$ в данном случае имеют вид:

$$Q_1(t)=\begin{pmatrix}3-4e^{t-b}\\ 1-2e^{t-b}+6at\\ 6+2at\end{pmatrix},\ Q_2(t)=\begin{pmatrix}5-6e^{t-b}\\ 1-6e^{t-b}+8at\\ 3+1at\end{pmatrix},\ A(t)=\begin{pmatrix}-2e^{t-b} & 5e^{t-b} & 0\\ at & -at-e^{t-b} & 3e^{t-b}\\ 0 & at & -2at\end{pmatrix}.$$

Проинтегрировав левую и правую части равенства (2) от 0 до t, получим:

$$\int_0^t dV_i(u)=\int_0^t Q_i(u)du+\int_0^t A(u)V_i(u)du\,. \qquad (4)$$

Возьмем преобразование Лапласа от левой и правой частей. Из свойств преобразования Лапласа [2] имеем, что выражения $U_i(s)-\dfrac{V_i(0)}{s}$, $\dfrac{G_i(s)}{s}$, $e^{-b}\dfrac{U_i(s)}{s-1}$, $-\dfrac{aU_i^{'}(s)}{s}$ являются преобразованиями Лапласа функций $\int_0^t dV_i(u)$, $\int_0^t Q_i(u)du$, $\int_0^t e^{u-b}V_i(u)du$, $\int_0^t auV_i(u)du$ соответственно. Используя эти соотношения, из (4) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} U_1(s)-\dfrac{34}{s}=\dfrac{2}{s}-\dfrac{6e^{-b}}{s-1}-\dfrac{5e^{-b}U_1(s)}{s-1}+\dfrac{4e^{-b}U_2(s)}{s-1}, \\ U_2(s)-\dfrac{25}{s}=\dfrac{6a}{s^2}-\dfrac{3e^{-b}}{s-1}+\dfrac{2}{s}-\dfrac{a}{s}U_1'(s)-\dfrac{2e^{-b}U_2(s)}{s-1}+\dfrac{a}{s}U_2'(s)+\dfrac{6e^{-b}U_3(s)}{s-1}, \\ U_3(s)-\dfrac{10}{s}=\dfrac{5a^2}{s^2}+\dfrac{4}{s}-\dfrac{a}{s}U_2'(s)+\dfrac{3a}{s}U_3'(s). \end{cases}$$

Из третьего уравнения выразив $U_3(s)$ через $U_2(s)$: $U_1(s)=\dfrac{23(s-1)}{s(s-1+e^{-b})}-\dfrac{e^{-b}(7+U_2(s))}{(s-1+e^{-b})}$ и подставив в первое и второе уравнения приведем полученную систему к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{ae^{-b}-a(s-1+e^{-b})}{s(s-1+e^{-b})}U_2'(s)-\left(\dfrac{2as}{(s-1+e^{-b})^2}+\dfrac{e^{-b}}{s-1}\right)U_2(s)-\dfrac{e^{-b}}{s-1}U_3(s)= \\ =\dfrac{7a+27s}{s^2}-\dfrac{4e^{-b}}{s-1}-\dfrac{23ae^{-b}s}{s^3(s-1+e^{-b})^2}-\dfrac{23a(s-1)}{s^3(s-1+e^{-b})}, \\ \dfrac{a}{s}U_2'(s)+3\dfrac{a}{s}U_3'(s)-U_3(s)=\dfrac{7a^2}{s^2}+\dfrac{14}{s}. \end{cases}$$

Решая данную систему с помощью пакета Mathematica, получаем выражения для функций $U_1(s),\ U_2(s),\ U_3(s)$. Например, выражение для $U_2(s)$ имеет вид:

$$U_2(s)=\frac{3e^{-b}}{(s-1)^2}+\frac{2as^2}{(s-1)^2(s^2-1)(s-1+e^{-b})}+\frac{e^{-b}(s-3)}{s(s+1)(s+2)^3}+\frac{2(s-3)e^{-b}}{(s+1)^2}+$$
$$\frac{as}{(s+2)(s+4)}+\frac{e^{-b}}{s^4}+\frac{5}{s(s-3)^3}+\frac{s-1+e^{-b}}{a(s-3)^3}+4+3e^{-\sqrt{4s}}+2e^{-b}\frac{1}{(s-2)^2}\ln\frac{s-1}{s-5}+\frac{ae^{-b}}{(s-1)^2}+$$
$$\frac{3e^{-b}s}{s(s+1)(s^2-1)}+\frac{2e^{-b}(s-3)(s-4)}{(s+2)^3(s+3)^2}+\frac{4as}{(s+2)(s+4)}+\frac{3e^{-b}}{s^5(s-1)^2}+\frac{11}{a\sqrt{s+1}(s-3)^2}+e^{-2t}.$$

.

Взяв обратное преобразование Лапласа от них, получим выражения для ожидаемых доходов $v_i(j,t),\ i=\overline{1,n}$.

Например, для дохода $v_2(2,t)$ при $a=1,\ \ b=1$ имеем:

$$v_2(2,t)=-\frac{1}{9}+\frac{32}{8e^2}-105e^{-1-3t}+\frac{126}{8}e^{-1-2t}+\frac{13e^{-1+t}}{4}-\frac{e^{-t}}{8}-\frac{e^{2+t-\frac{t}{e}}}{4}-\frac{2e^{-t}}{e}+$$
$$+\frac{5e^{2t+4+\frac{t}{e}}}{3e}+\frac{e^{3t}}{27}-2\frac{e^{5t}}{3e}+3ate^{-4t}+\frac{e^{-t}}{8\sqrt{\pi}\,t^{-\frac{3}{2}}}+\frac{2e^{-\frac{1}{t}}}{\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{2}}}-\frac{2e^{4t-\frac{t}{e}}}{t}+$$
$$+\frac{3e^{-8t}}{\sqrt{\pi t}}+\frac{2t}{e}-23te^{-1-3t}+\frac{2e^{3t}}{t}-\frac{112}{4}te^{-1-2t}-\frac{11}{2}te^{-1-t}+$$
$$+te^{t-1}+\frac{5te^{t}}{4}+\frac{(t+e)e^{t}}{e}-\frac{2}{9}te^{3t}+\frac{3t^2}{e}+\frac{53}{4}t^2+\frac{t^3}{2e}+\frac{t^4}{13e}+\frac{e^{3t}}{18}.$$

График данной функции представлен на рисунке 1.

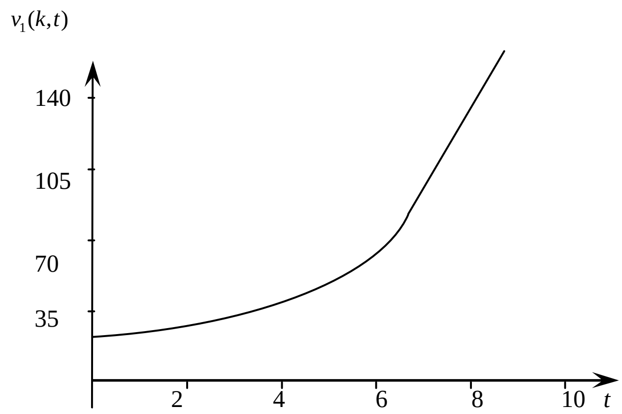

Рис. 1 График дохода для состояния сети $k=(1,1)$

Рассмотрим случай, когда интенсивности обслуживания заявок в системах сети являются кусочно-постоянными функциями времени с несколькими интервалами постоянства, совпадающими для всех систем сети:

$$\mu_i(t)=\begin{cases}\mu_i^{(1)}, & t\in[0,t_1],\\ \mu_i^{(2)}, & t\in[t_1,t_2],\\ \dots \\ \mu_i^{(m)}, & t\in[t_{m-1},T].\end{cases}, \quad i=\overline{1,n},$$

Тогда систему уравнений (2) можно представить на различных интервалах в матричном виде:

$$\frac{dV_i^{(q)}(t)}{dt}=Q_i^{(q)}(t)+A^{(q)}V_i^{(q)}(t), \tag{5}$$

где $V_i^{(q)}(t)=(v_i^{(q)}(1,t),...,v_i^{(q)}(l,t))^T$ - вектор доходов системы S_i на q-ом интервале времени. Зададим вектора начальных условий: $V_i(0)$, $V_i^{(q)}(t_{q-1})=V_i^{(q-1)}(t_{q-1}), q=\overline{1,m}$. Опишем, как можно найти решение системы (4) на различных интервалах времени. Умножив обе части системы (4) на $e^{-A^{(q)}t}$, получим

$$e^{-A^{(q)}t}V_i'(t)=e^{-A^{(q)}t}A^{(q)}V_i(t)+e^{-A^{(q)}t}Q_i(t)$$

или

$$e^{-A^{(q)}t}\left(V_i'(t)-A^{(q)}V_i(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{-A^{(q)}t}V_i(t)\right)=e^{-A^{(q)}t}Q_i(t),$$

откуда следует

$$e^{-A^{(q)}t}V_i(t)=V_i(0)+\int_0^t e^{-A^{(q)}\tau}Q_i(\tau)d\tau,$$

то есть

$$V_i(t)=e^{A^{(q)}t}V_i(0)+\int_0^t e^{A^{(q)}(t-\tau)}Q_i(\tau)d\tau,$$

где $e^{A^{(q)}t}=I+A^{(q)}t+\frac{{A^{(q)}}^2t^2}{2!}+...+\frac{{A^{(q)}}^nt^n}{n!}+...$ – матричная экспонента.

Число состояний $l=C_{n+K-1}^{n-1}$ является достаточно большим даже при относительно небольших n и K, поэтому число уравнений в системе (5) также будет достаточно большим. Прямой метод включает в себя задачу нахождения экспоненты матрицы с постоянными элементами. Используемые на данный момент реализации подобных алгоритмов в математических пакетах требуют огромных затрат машинной памяти и процессорного времени. Для более быстрого и эффективного вычисления матричной экспоненты можно использовать специальный алгоритм «быстрого» вычисления [3], основанный на формуле:

$$e^{A^{(q)}t}\approx\left(\sum_{s=0}^{N}\frac{(A^{(q)})^s}{s!}\left(\frac{t}{2^M}\right)^s\right)^{2^M},$$

где $N\geq 1$, $M\geq 0$ – некоторые целые числа. Сам алгоритм нахождения матричной экспоненты $e^{A^{(q)}t}$ с указанной точностью ε имеет следующий вид.

1. Находится $\left\|A^{(q)}\right\|t$, где $\left\|A^{(q)}\right\| = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|(a^{(q)})_{ij}\right|$, где $(a^{(q)})_{ij}$ – компонента матрицы $A^{(q)}$.

2. По заданному ε выбираются значения M и N из следующих соотношений:

$$M = \begin{cases}[z]+1, & \left\|A^{(q)}\right\|t > v\\ 0, & \left\|A^{(q)}\right\|t \le v\end{cases}, \quad z = \frac{1}{\ln 2}\left(\ln\frac{\left\|A^{(q)}\right\|t}{N+1} - \frac{1}{2(N+1)}\right) + N, \quad v = \frac{1}{2^N}(N+1)e^{\frac{1}{2(N+1)}},,$$

где N находится из неравенства $\dfrac{e^{\left\|A^{(q)}\right\|t}\left(\left\|A^{(q)}\right\|t\right)^{N+1}}{2^{MN}(N+1)!} \le \varepsilon$.

3. Полагаем $i := 0$ и организовываем цикл.

4. Полагаем, что $G := \sum\limits_{s=0}^{N}\dfrac{(A^{(q)})^s}{s!}\left(\dfrac{t}{2^M}\right)^s$.

5. Увеличиваем счетчик i на единицу $i := i+1$.

6. В 4 вместо G записываем G^2.

7. Если $i < M$, то переходим к пункту 4.

8. Если $i = M$, то полагаем $e^{A^{(q)}t} \approx G$.

9. Конец алгоритма.

Пример 2. В данном примере рассматривается решение системы уравнений (2) вышеприведенным прямым методом. Рассмотрим замкнутую сеть со следующими параметрами: $n=4$, $K=4$, $T=10$, $m=3,\ t_1=4,\ t_2=6$ и матрицей вероятностей переходов заявок между СМО сети

$$P = \left\|p_{ij}\right\|_{4\times 4} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Интенсивности обслуживания заявок зададим в виде:

$$\mu_1(t) = \begin{cases}20, t\in[0,4],\\ 10, t\in(4,6],\\ 11, t\in(6,10],\end{cases} \quad \mu_2(t) = \begin{cases}12, t\in[0,4],\\ 15, t\in(4,6],\\ 9, t\in(6,10],\end{cases} \quad \mu_3(t) = \begin{cases}12, t\in[0,4],\\ 17, t\in(4,6],\\ 14, t\in(6,10],\end{cases} \quad \mu_4(t) = \begin{cases}15, t\in[0,4],\\ 18, t\in(4,6],\\ 13, t\in(6,10].\end{cases}$$

В данном случае число состояний равно $l = C_{n+K-1}^{n-1} = 35$, это будут состояния (0,0,0,4), (0,0,1,3), (0,0,2,2) и т.д. Переобозначим их соответственно от 1 до 35. Пусть доходы $r(k)$, $R(k)$ имеют следующий вид $r(1)=r(23)=5,\quad r(4)=r(17)=r(19)=r(34)=4,\quad r(5)=r(15)=r(26)=r(32)=6,\quad r(9)=8,$
$r(6)=r(29)=3,\ r(2)=r(18)=r(31)=9,$
$r(7)=r(11)=r(12)=r(21)=r(27)=7,\ r(3)=10,\ r(8)=r(16)=r(28)=r(33)=2,$
$r(13)=r(20)=r(22)=r(24)=r(25)=r(30)=r(35)=1;\ R(13)=R(24)=1,\ R(33)=3,\ R(17)=R(27)=2,$
$R(1)=R(7)=R(8)=R(14)=R(18)=R(23)=5,\ R(28)=R(29)=8,$
$R(2)=R(10)=R(15)=R(16)=R(25)=R(34)=10,\ R(9)=R(31)=9,\ R(3)=R(6)=R(11)=R(30)=R(32)=7,$
$R(5)=R(12)=R(21)=4,\ R(4)=R(19)=R(20)=R(22)=R(26)=R(35)=6.$ Зададим вектор начальных условий:

$$V(0) = (7,4,9,10,7,8,5,9,5,10,2,7,1,1,5,5,1,2,3,1,2,4,6,7,8,2,3,4,1,2,3,1,2,1,1).$$

Произведя все необходимые вычисления, получаем следующую систему дифференциальных уравнений для доходов:

$$\begin{cases}
\frac{dv_1(t)}{dt} = -6{,}7v_2(t) + 6{,}7v_3(t) + 72.6; \quad \frac{dv_2(t)}{dt} = -6{,}7v_2(t) + 6{,}7v_6(t) + 16{,}3; \\
\frac{dv_3(t)}{dt} = 20v_1(t) - 16v_3(t) + 6{,}7v_8(t) - 183{,}3; \quad \frac{dv_4(t)}{dt} = -6{,}7v_4(t) + 6{,}7v_9(t) + 44; \\
\frac{dv_5(t)}{dt} = -6{,}7v_5(t) + 6v_{12}(t) + 60{,}3; \quad \frac{dv_6(t)}{dt} = 20v_2(t) - 16v_6(t) + 6{,}7v_{14}(t) - 51{,}3; \\
\frac{dv_7(t)}{dt} = -6{,}7v_7(t) + 6v_{15}(t) + 48 \;; \frac{dv_8(t)}{dt} = 20v_3(t) - 16{,}7v_8(t) + 6v_{17}(t) - 188{,}3; \\
\frac{dv_9(t)}{dt} = 20v_4(t) - 16v_9(t) + 6{,}7v_{18}(t) + 13{,}6; \quad \frac{dv_{10}(t)}{dt} = -6{,}7v_{10}(t) + 6{,}7v_{19}(t) + 42{,}3; \\
\frac{dv_{11}(t)}{dt} = -6{,}7v_{11}(t) + 6v_{22}(t) + 42{,}3; \quad \frac{dv_{12}(t)}{dt} = 20v_5(t) - 16v_{12}(t) + 16v_{24}(t) + 28{,}6; \\
\frac{dv_{13}(t)}{dt} = -6v_{13}(t) + 6{,}7v_{25}(t) + 41{,}3; \quad \frac{dv_{14}(t)}{dt} = 20v_6(t) - 16{,}7v_{14}(t) + 6v_{27}(t) + 22; \\
\frac{dv_{15}(t)}{dt} = 20v_7(t) + 6{,}7v_{28}(t) - 142{,}7; \quad \frac{dv_{16}(t)}{dt} = -6{,}7v_{16}(t) + 6{,}7v_{29}(t) + 47; \\
\frac{dv_{17}(t)}{dt} = 20v_8(t) + 6{,}7v_{31}(t); \quad \frac{dv_{18}(t)}{dt} = 20v_9(t) - 16{,}7v_{18}(t) + 6v_{32}(t) + 100{,}7; \\
\frac{dv_{19}(t)}{dt} = 20v_{10}(t) - 16v_{19}(t) + 6{,}7v_{33}(t) - 33; \quad \frac{dv_{20}(t)}{dt} = -6{,}7v_{20}(t) + 6v_{34}(t) - 76{,}7; \\
\frac{dv_{21}(t)}{dt} = 2; \quad \frac{dv_{22}(t)}{dt} = -10v_{22}(t) - 116; \quad \frac{dv_{23}(t)}{dt} = 5; \quad \frac{dv_{24}(t)}{dt} = -10v_{24}(t) - 151; \\
\frac{dv_{25}(t)}{dt} = -6{,}7v_{17}(t) + 6{,}7v_{33}(t); \quad \frac{dv_{26}(t)}{dt} = 7; \quad \frac{dv_{27}(t)}{dt} = -10v_{27}(t) - 19; \\
\frac{dv_{28}(t)}{dt} = -10v_{27}(t) - 112; \\
\frac{dv_{29}(t)}{dt} = -6{,}7v_{29}(t) + 6{,}7v_{34}(t) + 48{,}7; \quad \frac{dv_{30}(t)}{dt} = -16{,}7v_{30}(t) + 6{,}7v_{35}(t) - 22; \\
\frac{dv_{31}(t)}{dt} = -6{,}7v_{31}(t) + 6{,}7v_{35}(t) + 22{,}7; \quad \frac{dv_{32}(t)}{dt} = -10v_{32}(t) - 134; \\
\frac{dv_{33}(t)}{dt} = 5; \quad \frac{dv_{34}(t)}{dt} = -10v_{34}(t) - 95; \quad \frac{dv_{35}(t)}{dt} = 10.
\end{cases}$$

Это система линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решая ее с помощью пакета Mathematica, можно получить выражения для доходов, например, $v_1(k,t) = 5{,}6 + 18t + 4{,}2t^{128} + 2{,}13t^{203} + 8{,}24t^{218}$.

Опишем еще один способ нахождения ожидаемых доходов. От системы линейных неоднородных ДУ (2) можно перейти к системе разностных уравнений. Разбиваем временной промежуток $[0,T]$ сеткой $\{t_j\}_{j=1}^{N}$ с шагом h, т.е. $t_j = t_0 + jh,\ t_0 = 0,\ h = \frac{T}{N}$. Положим $\frac{dV_i(t_j)}{dt} = \frac{V_i(t_{j+1}) - V_i(t_j)}{h}$. Тогда получим разностную схему: $\begin{cases} V_i(t_{j+1}) = V_i(t_j) + Q_i(t_j)h + A(t_j)V_i(t_j)h, \\ t_j = t_0 + jh,\ t_0 = 0,\ h = \frac{T}{N},\ i = \overline{1,n}. \end{cases}$. Начальные условия имеют вид: $V_i(0) = 0,\ Q_i(0) = 0.$ Тогда для каждого $t_j = t_0 + jh$ получаем систему линейных алгебраических уравнений, решая которых с помощью пакета математических вычислений Mathematica, получаем значения $V_i(t_0), V_i(t_1), \ldots, V_i(t_s)$.

Пример 3. Рассмотрим замкнутую сеть со следующими параметрами: $n = 5$, $K = 10$, $h = 0.01$,

$T = 10$, $N = 1000$. Число ее состояний равно $l = 1001$. Переобозначим состояния от 1 до 1001. Пусть интенсивности обслуживания заявок в каждой СМО имеют вид:

$$\mu_1(t) = 1 + 2t,\ \ \mu_2(t) = 1 + t,\ \ \mu_3(t) = 1 + 5t,\ \ \mu_4(t) = 1 + 3t,\ \ \mu_5(t) = 1 + 8t\ .$$

Для каждого узла сетки составляем систему линейных алгебраических уравнений, решая которые получаем значения доходов в указанных точках. По ним можно построить графики функций $v_i(k,t)$. На рис. 2 представлен ожидаемый доход системы S_3 при начальном состоянии сети $k = (1,2,2,1)$.

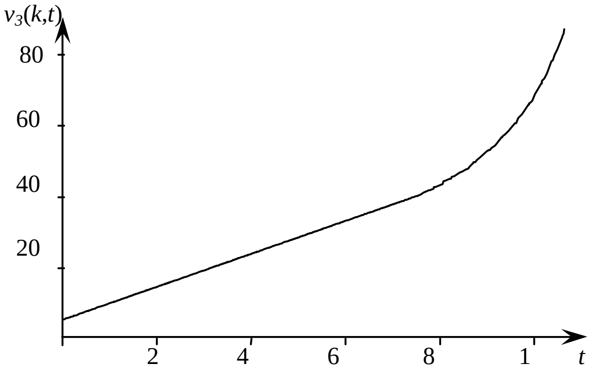

Рис. 2 График дохода для состояния сети $k = (1,2,2,1)$

Литература

1. Маталыцкий, М.А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских систем с доходами и их применение. / М.А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 10. – С. 97 – 113.

2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 567 с.

3. Ершова, В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В.В. Ершова. – Минск.: Высшая школа, 1976. – 256 с.