УДК 517.925.42

Л.А. Черкас, А.А. Гринь

ФУНКЦИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НА ЦИЛИНДРЕ

Аннотация. Разработанный нами ранее подход к решению проблемы оценки числа и локализации предельных циклов для автономных систем на плоскости с помощью вспомогательных функций Дюлака и Пуанкаре распространен на автономные системы дифференциальных уравнений с цилиндрической фазовой поверхностью.

Рассмотрены все принципиальные аспекты, отличные от классического подхода, касающиеся предельных циклов второго рода. Построение функций Дюлака и Пункаре в виде линейной комбинации некоторых базисных функций, в том числе и для однопараметрических семейств систем, линейно зависящих от параметра, проводится аналогично как и для динамических систем на плоскости. Нахождение вспомогательных функций сводится к решению задачи линейного программирования относительно коэффициентов рассмотренной линейной комбинации. Предложенный метод успешно апробирован на примерах однопараметрических семейств уравнений Абеля.

1. Введение. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = P(u, y), \ \frac{dy}{dt} = Q(u, y), \tag{1}$$

в которой P, $Q \in C^1(\Omega)$, $\quad \Omega \subseteq R^2$, а также являются периодическими функциями u с периодом 2π. В силу периодичности вместо фазовой плоскости $(u,\, y)$ поведение траекторий системы (1) достаточно рассмотреть на круговом цилиндре $\Omega_c = \{(u, y) : u \in [u_0, u_0 + 2\pi], y \in R\}$, где возможны те и только те типы траекторий, что и для системы на плоскости [1, с. 219].

Однако следует различать замкнутые траектории и контуры, не охватывающие и охватывающие цилиндр, в частности, предельные циклы соответственно первого и второго рода [2, с. 466; 3, с. 35]. Так, для предельных циклов первого рода системы (1) также применим метод модифицированных функций Дюлака [4] и различные пути его реализации, разработанные в работах [5–11] для оценки числа и локализации предельных циклов структурно устойчивой системы на плоскости. Кроме того, можно использовать представленные в работах [12, 13] алгоритм построения и метод исследования функции предельных циклов (Андронова-Хопфа) однопараметрических семейств систем на плоскости. Однако при изучении предельных циклов второго рода системы (1) возникают некоторые отличительные особенности, связанные с построением функций Дюлака и Пуанкаре, изучение которых является целью настоящей работы.

2. Обобщенный критерий Дюлака для предельных циклов второго рода. Так как в настоящей работе изучаются лишь предельные циклы второго рода, то в дальнейшем естественно рассматривать систему (1) только в кольцеобразной области (кольце) D, охватывающей цилиндр Ω_c и удовлетворяющей следующим условиям

(i) $D = \{(u, y) : u \in [u_0, u_0 + 2\pi], \gamma_1 = \gamma_1(u) \le y \le \gamma_2 = \gamma_2(u), \gamma_1(u_0) = \gamma_1(u_0 + 2\pi), \gamma_2(u_0) = \gamma_2(u_0 + 2\pi)\}$, причем функции γ_1 и γ_2 задают непересекающиеся кривые $(\gamma_1 < \gamma_2)$.

(ii) В области D нет особых точек системы (1).

Определение 1. Пусть $X = (P, Q)$ – векторное поле, задаваемое системой (1) в области $D \subset \Omega_c$. Функция $B \in C^1(D)$, для которой $div(BX)$ не изменяет знак в D, а кривая $div(BX) = 0$ не содержит предельных циклов, называется функцией Дюлака системы (1) в области D.

Тогда по критерию Дюлака в случае существования такой функции B система (1) в рассматриваемой области D может иметь не более одного предельного цикла второго рода [1, с. 222].

Теперь рассмотрим новый подход, являющийся обобщением критерия Дюлака.

Определение 2. $2\pi-$периодическая по u функция $\Psi(u, y) \in C^1(D)$ называется функцией Дюлака системы (1) в области D, если существует действительное число $k \neq 0$ такое, что в D выполняется неравенство

$$\Phi := k\Psi divX + \frac{\partial \Psi}{\partial u}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q > 0 \ (< 0). \tag{2}$$

Отметим ряд ключевых свойств, вытекающих из определения 2 и результатов работы [14].

Лемма 1. *Если Ψ является функцией Дюлака системы (1) в области D и $W := \{(u, y) \in D : \Psi(u, y) = 0\}$, то*

1. $B := |\Psi|^{\frac{1}{k}}$ представляет собой функцию Дюлака в классическом варианте в каждой из подобластей D, где Ψ является положительной или отрицательной.

2. траектории системы (1) при встрече с множеством W пересекают его трансверсально.

3. множество W представляет собой кривую, ветви которой не пересекаются друг с другом.

4. предельные циклы системы (1), целиком расположенные в D, не пересекают кривую W.

Замечание 1. Из леммы 1 следует, что множество W может состоять из двух непересекающихся подмножеств, представляющих собой незамкнутые кривые W_{nc} и овалы, охватывающие цилиндр W_{cs}. При этом W отделяет подобласти области D, где $\Psi > 0$ от подобластей, где $\Psi < 0$.

Замечание 2. Принципиальное преимущество предложенного подхода к оценке числа предельных циклов перед классическим критерием Дюлака заключается в отсутствии необходимости заранее проводить локализацию предельных циклов, поскольку она следует из топологического анализа кривых множества W.

Следующий результат является уточнением обобщенного критерия Дюлака для области D, приведенного нами в работе [14].

Теорема 1. *Пусть Ψ является функцией Дюлака системы (1) в области D, удовлетворяющей условиям (i) и (ii). При этом множество W состоит из s овалов $w_1, w_2, ..., w_s$, охватывающих цилиндр, и разбивает D на $s+1$ кольцо $\gamma_1 < w_1 < w_2 < ... < w_s < \gamma_2$. Тогда при отрицательном k система (1) имеет в каждом из $s - 1$ кольце между соседними овалами точно один предельный цикл второго рода, а всего система в области D может иметь не более $s + 1$ таких предельных циклов (по одному циклу может быть между γ_1 и w_1, а также между γ_2 и w_s).*

Доказательство. Не теряя общности, можем считать, что $\Phi > 0$ в D. Тогда на каждом из s овалов множества W, разбивающих область D на $s + 1$ кольцо, в соответствии с леммой 1 производная $\frac{d\Psi}{dt} > 0$. Таким образом, любая траектория системы (1) при возрастании времени может пересечь любой из указанных овалов только в направлении из кольца, где $\Psi < 0$, в кольцо, где $\Psi > 0$. С другой стороны из (2) имеем

$$divX = \frac{\Phi - \frac{d\Psi}{dt}}{k\Psi}. \tag{3}$$

Поэтому, если в каком-то из колец существует предельный цикл Γ периода T, то на нем из (3) получаем

$$\int\limits_{\Gamma} divX dt = \int\limits_0^T \frac{1}{k\Psi}\left(\Phi - \frac{d\Psi}{dt}\right)dt = \int\limits_0^T \frac{\Phi}{k\Psi}dt. \tag{4}$$

В силу наших предположений и условия (ii) равенство (4) обеспечивает существование точно одного устойчивого предельного цикла второго рода в каждом внутреннем кольце, где $\Psi > 0$, и точно одного неустойчивого предельного цикла второго рода в каждом внутреннем кольце, где $\Psi < 0$. Следовательно, система (1) за счет внутренних колец имеет по крайней мере $s-1$ предельных циклов второго рода. Еще по одному такому предельному циклу может быть в крайних кольцах (между γ_1 и w_1, а также между γ_2 и w_s). То есть у системы (1) в области D существует всего не более $s+1$ предельных циклов.

Замечание 3. При $k \geq 0$, а также при $k < 0$, если $s = 0$, теорема 1 представляет собой классический критерий Дюлака.

Следствие. Если в кольце, где $\Psi > 0 \quad (\Psi < 0)$, существует предельный цикл второго рода, то он является устойчивым (неустойчивым) при $ksign(\Psi\Phi) < 0$ ($ksign(\Psi\Phi) > 0$).

Замечание 4. В определении 2 условие (2) можно ослабить, но дополнительно потребовать, что Φ не равняется тождественно нулю, и кривая $\Phi = 0$ не содержит предельного цикла второго рода системы (1) [11].

Аналогично случаю системы на плоскости, при таком подходе в замкнутой ограниченной области D функцию $\Psi(u, y)$ для системы (1) удобно искать в виде линейной комбинации заданных базисных функций $\Psi_j(u, y)$:

$$\Psi = \Psi(u, y, C) = \sum_{j=1}^{n} C_j \Psi_j(u, y), \quad C_j = const, \quad C = (C_1, ..., C_n). \tag{5}$$

Тогда функция $\Phi(u, y)$ также является аналогичной линейной комбинацией известных функций Φ_j:

$$\Phi = \Phi(u, y, C) = \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(u, y). \tag{6}$$

В отличие от полиномиальных систем на плоскости, когда базисные функции $\Psi_j(x, y)$ из (5) брались мономами $x^{r(j)}y^{s(j)}$, $0 \leq r(j) + s(j) \leq p$, $j = 1, ..., n$ [5–9], учитывая периодичность функций по u, для системы (1) функцию $\Psi(u, y)$ будем строить в виде

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n_0+1} y^{i-1}\left(\sum_{l=1}^{m_0} a_{il}\cos((l-1)u) + \sum_{l=1}^{m_0} b_{il}\sin((l-1)u)\right). \tag{7}$$

Объединив коэффициенты

$$C_j = \left[\begin{array}{l} C[(i-1)m_0 + l] = a_{il}, \\ C[(i-1)m_0 + l + m_0(n_0+1)] = b_{il}, \end{array}\right.$$

в один массив длины $n = 2m_0(n_0+1)$, удобно искать функцию Ψ вида (7), используя сеточную задачу линейного программирования [6, 8]

$$L \to \max,\ \sum_{j=1}^{m} C_j\Phi_j(u_p, y_p) - L \geq 0,\ |C_j| \leq 1, \tag{8}$$

на сетке узлов $(u_p, y_p), p = 1, \dots, N_0$, взятой в области D. Затем алгебраическими методами строго подтверждаем, что Ψ является функцией Дюлака системы (1) в области D, и применяем теорему 1.

3. Построение и исследование функции предельных циклов второго рода. Рассмотрим теперь систему (1)

$$\frac{du}{dt} = P(u, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u, y, a), \tag{9}$$

зависящую от скалярного параметра $a \in I \subset R$ для $(u, y) \in D \subset \Omega_c$.

Наша главная цель состоит в использовании зависимости системы (9) от параметра для получения точной оценки и локализации предельных циклов второго рода и определения их кратности. Если параметр a рассматривать как дополнительную фазовую переменную, то из (9) можно получить соответствующую расширенную систему

$$\frac{du}{dt} = P(u, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u, y, a), \quad \frac{da}{dt} = 0. \tag{10}$$

В соответствии с [12, 13] предположим, что эта система имеет инвариантное многообразие в виде

$$a = m(u, y), \tag{11}$$

состоящее из предельных циклов системы (9), а также существует в фазовой плоскости гладкий отрезок

$$\mathcal{S} := \{(u, y) \in \Omega_c : u = s(y),\, y_0 \leq y \leq y_1, \}$$

который все предельные циклы семейства (11) пересекают трансверсально.

Определение 3. Если различные предельные циклы $L(y)$ семейства (11) пересекают отрезок $\mathcal{S}$ в различных точках $(s(y), y)$, то мы можем ввести функцию l: $[y_0, y_1] \to R$ следующим образом

$$l(y) := m(s(y), y),$$

которая однозначным образом ставит в соответствие предельному циклу $L(y_i)$, пересекающему $\mathcal{S}$ в точке $(s(y_i), y_i)$, значение параметра a_i. Такая функция $a = l(y)$ называется функцией предельных циклов второго рода системы (9) [13].

Если параметр a поворачивает векторное поле системы (9) в Ω_c, то есть справедливо неравенство

$$(P)'_a Q - P(Q)'_a \geqslant 0 (\leqslant 0), \tag{12}$$

которое не является тождеством на любом предельном цикле системы (9), принадлежащем многообразию (11), то функция $l(y)$ совпадает с функцией предельных циклов Андронова-Хопфа [12].

Замечание 5. Условие (12) означает, что предельные циклы системы (9) при изменении параметра a изменяют свое положение, но при этом не пересекаются при различных значениях параметра [1, с. 225].

Алгоритм построения функции предельных циклов второго рода $l(y)$ системы (9), вычисляющий для заданного $y \in D(l)$ соответствующее значение параметра $a = l(y)$, полностью аналогичен представленному в работе [13] для системы на плоскости, основанному на использовании метода Ньютона к отображению Пуанкаре и представляющему собой метод продолжения по параметру y_i.

Результаты численных расчетов функции $l(y)$ не всегда надежны в том плане, что могут не учитывать тонкую структуру ее поведения, например, в окрестности пары очень близких экстремумов. Ниже мы покажем, как проверять достоверность поведения функции $l(y)$ в окрестности точки простого экстремума и на промежутке монотонности.

Для этого функция $l(y)$, $y \in J = [y_0, y_1]$, например с помощью метода наименьших квадратов аппроксимируется полиномом или сплайн-функцией $l_p(y)$ подходящей степени. Функция $l_p(y)$ дает возможность приближенно найти области возрастания и убывания функции $l(y)$. Для этого разбиваем отрезок J на перекрывающие друг друга на своих концах отрезки J_v двух типов: 1) отрезки, соответствующие строго монотонному поведению функции $l(y)$, 2) отрезки, содержащие критические точки $l(y)$, которые соответствуют кратным предельным циклам. Здесь мы ограничимся изучением критических точек при $l^{''}(y) \neq 0$.

Рассмотрим сначала один из монотонных участков J_v функции $l = l(y)$, соответствующий грубому поведению системы (9).

Теорема 2. *Пусть для системы* (9) *при всех* $a \in I = [a_1; a_2]$ *выполняются условия:*

1) параметр a поворачивает поле в области D;

2) существуют функции $C_j(a), j = 1, \ldots, n$, а также функция

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n} C_j(a)\Psi_j(u, y) \tag{13}$$

такие, что функция

$$\Phi(u, y, a) = \sum_{j=1}^{n} C_j(a)\Phi_j(u, y, a) > 0 \ (u, y) \in D_v = 2\pi \times J_v. \tag{14}$$

Тогда, если семейство предельных циклов при $a \in I$ заполняет кольцеобразную область $D_v \subset D$, то она соответствует монотонной функции $l(y)$, и система (9) *при каждом значении $a \in I$ имеет в области D_v точно один предельный цикл второго рода.*

Теорема 3. (Бендиксона-Дюлака) *Пусть для системы* (9) *при всех* $a \in I = [a_1; a_2]$ *выполняются условия теоремы 2. Тогда, если траектории системы* (9) *при увеличении времени входят через границу ∂D_v извне вовнутрь области D_v (или наоборот), то в области D_v имеется точно один устойчивый (неустойчивый) предельный цикл второго рода системы* (9).

Более трудоемким является доказательство простоты точек экстремума, так как в них система (9) структурно неустойчива, и подходы, использовавшиеся для монотонных участков функции $l(y)$, соответствующих грубым системам, в этом случае не работают. Учитывая топологическую эквивалентность цилиндра Ω_c системы (1) и кольцеобразной области системы на плоскости, здесь воспользуемся результатами работы [4], которые при соответствующих изменениях аналогично доказываются для рассматриваемого случая:

Теорема 4. *Система (9) не имеет предельных циклов второго рода кратности три и выше тогда и только тогда, когда система*

$$\frac{du}{dt} = P(u,y,a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u,y,a), \quad \frac{dz}{dt} = divX, \quad \frac{dw}{dt} = e^z H_2 \tag{15}$$

не имеет предельных циклов второго рода. Здесь

$$H_2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{PH_1}{H}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{QH_1}{H}\right), \quad H_1 = divX, \quad H = P^2 + Q^2, \tag{16}$$

функция $w(u,y,a) \in C^1(D)$ является $2\pi-$периодической по u.

Если для системы (15) в качестве функции Пуанкаре [13] выбрать функцию $V = \Psi(u,y)e^z + \alpha w,\ \alpha \in R$,

$$\frac{dV}{dt} = \left(\Psi divX + \frac{d\Psi}{dt}\right)e^z + \alpha H_2 e^z = e^z\left(\Psi divX + \frac{d\Psi}{dt} + \alpha H_2\right),$$

то отсутствие в области D_v предельных циклов второго рода кратности выше двух у системы (9) сводится к выполнению условия

$$\Psi divX + \frac{d\Psi}{dt} + \alpha H_2 > 0,\ (u,y) \in D_v,\ a \in I. \tag{17}$$

Теорема 5. *Пусть система (9) при всех $a \in I = [a_1, a_2]$ удовлетворяет условиям:*

1) параметр a поворачивает поле в области D_v;

2) существуют функции $C_j(a), j = 1,\ldots,n+1$, а также функция (13) такие, что функция

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} C_j(a)\Phi_j(u,y,a) + C_{n+1}(a)H_2(u,y,a) > 0,\ (u,y) \in D_v, \tag{18}$$

где $C_{n+1}(a) > 0 (< 0)$, и все рассматриваемые функции имеют необходимую гладкость;

3) система (9) при $a = a_1(a_2)$ имеет в области D_v два предельных цикла, а при $a = a_2(a_1)$ она не имеет предельных циклов в области D_v.

Тогда система (9) имеет в области D_v не более двух предельных циклов.

Доказательство вытекает из теоремы 4.

Лемма 2. *Если $P(u,y,a) > 0$ в области D_v, то систему (9) можно записать в эквивалентной форме*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Q(u,y,a)}{P(u,y,a)} = R(u,y,a), \frac{du}{dt} = 1, \tag{19}$$

для которой ее предельный цикл второго рода Γ имеет кратность, равную:

1) единице при $h_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial y} du \neq 0$,

2) двум при $h_1 = 0,\ h_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial y} du\right) du \neq 0$.

Для системы (9) справедлива теорема 5, если в качестве H_1 взять $\frac{\partial R}{\partial y}$, а в качестве H_2 положить $\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}$ [16].

Таким образом, изучение поведения функции предельных циклов $l(y)$ будет проводиться нами с помощью построения функций Ψ вида (13), в каждой области D_v удовлетворяющих или условию (14) или условию (18).

Для выбора области D_v, соответствующей отрезку $J_v = [\alpha, \beta]$ из области определения функции $l(y)$, как и в случае систем на плоскости [12], используя отображение Пуанкаре, приближенно находим $l(\alpha) \approx a_1$, $l(\beta) \approx a_2$, $a_1 < l(\alpha)$, $a_2 > l(\beta)$. Затем однопараметрическое семейство систем (9) "погрузим"в двухпараметрическое семейство систем

$$\frac{du}{dt} = P(u, y) - \mu Q(u, y), \;\; \frac{dy}{dt} = Q(u, y) + \mu P(u, y), \tag{20}$$

в котором параметр μ строго поворачивает поле при $(u, y) \neq (0, 0)$. Приближенно найдем предельные циклы Γ_i, $i = 1, 2$, системы (20) при $a = a_i$, $\mu = \mu_i$, проходящие соответственно через точки $y = c < \alpha$, $u = 0$ и $y = b > \beta$, $u = 0$. Они существуют, если значение c достаточно близко к α, а b – к β. При сохранении определенной точности вычислений кривые Γ_1 и Γ_2 являются трансверсалями системы (9) соответственно при $a = a_1$, $a = a_2$ и образуют кольцеобразную область D_v, в которой находятся все предельные циклы системы (9), проходящие через точки $(0, y_0)$, $y_0 \in J_v$. В зависимости от вида и взаимного расположения предельных циклов, соответствующих функции $l(y)$, области D_v можно выбирать и без применения семейства (20).

Пусть по численному прогнозу функция $l(y)$ должна возрастать на отрезке $J_v = [\alpha, \beta]$, и это мы должны подтвердить строго алгебраическими методами. Для применения теоремы 2 есть два пути. В первом случае, выбрав в области D_v сетку, с помощью решения соответствующей задачи (8) численно находим коэффициенты $C_j(a_i)$ функции Дюлака Ψ вида (13) для каждого значения $a_i = a_1 + h \cdot i$, $i = \overline{0, l}$, $h = (a_2 - a_1)/l$, чтобы выполнялось неравенство (2). Затем по значениям $C_j(a_i)$ строим сглаживающие многочлены $C_j(a)$ подходящей степени на отрезке $[a_1, a_2]$. Если построенная таким образом функция $\Phi(x, y, a)$ удовлетворяет условию (14), то на основании теоремы 2 получаем доказательство возрастания функции $l(y)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Вторая возможность для применения теоремы 2 основана на следующем утверждении.

Теорема 6. *Пусть для параметрического семейства систем* (9)*, линейно зависящего от параметра $a \in I = [a_1; a_2]$ выполняются условия:*

1) промежуток I не содержит критических значений параметра $a = l(y)$ $(l'(y) \neq 0)$;

2) существуют функции $C_j(a), j = 1, \ldots, n$, а также (13) *такие, что функция* (14) *удовлетворяет неравенствам*

$$\Phi(u, y, a_1) > 0, \Phi(u, y, a_2) > 0, \;\; (u, y) \in D_v = 2\pi \times J_v. \tag{21}$$

Тогда $\Psi(u, y, a)$ является функцией Дюлака семейства систем (9) *в области D_v при всех значениях $a \in I$.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из равенства

$$\Phi(u, y, a) = (a_2 - a)\Phi(x, y, a_1) + (a - a_1)\Phi(u, y, a_2). \tag{22}$$

Выполнение неравенств (21) также сводится к решению сеточной задачи линейного программирования

$$L \to \max, \; \sum_{j=1}^{m} C_j \Phi_j(u_p, y_p, a_1) - L \geq 0, \; \sum_{j=1}^{m} C_j \Phi_j(u_p, y_p, a_2) - L \geq 0, |C_j| \leq 1, \tag{23}$$

где число ограничений в узлах сетки удвоено по сравнению с задачей (8). Таким образом для всех $a \in I$ существует одна и та же функция Ψ в области D_v, по которой и производится оценка числа предельных циклов. На практике такой подход более эффективен, чем использование сглаживания.

Теперь пусть по численному прогнозу функция $l(y)$ имеет на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$ одну точку экстремума, и мы должны подтвердить это алгебраически. Сначала по выше описанной процедуре убедимся в справедливости теоремы 2 на соседних монотонных отрезках $[\alpha, \beta]$ и $[\alpha_2, \beta_2]$, α_1 выбираем достаточно близкое к β, а β_1 – к α_2, причем $\alpha_1 < \beta < \alpha_2 < \beta_1$.

При построении функции Пуанкаре V для применения теоремы 5 в окрестности точки экстремума, также как и в предыдущем случае, есть два пути. Можно выбрать в области D_v сетку и при каждом значении $a_i = a_1 + h \cdot i$, $i = \overline{0, l}$, $h = (a_2 - a_1)/l$ на отрезке $[a_1, a_2]$, $a_1 \approx l(\alpha_1)$, $a_2 \approx l(\beta_1)$ с помощью решения соответствующей задачи (8) численно найти коэффициенты $C_j(a_i)$, при которых выполняется неравенство (17). По найденным значениям $C_j(a_i)$ строим сглаживающие многочлены подходящей степени $C_j(a)$. Если полученная функция $\Phi(u, y, a)$ удовлетворяет условию (18), то в силу теоремы 5 функция $l(y)$ на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$ имеет единственную точку экстремума.

При линейной зависимости $P(u, y, a)$, $Q(u, y, a)$ и $H_2(u, y, a)$ от параметра $a \in I = [a_1, a_2]$ можно воспользоваться также как и в предыдущем случае сотношениями (21) и (22), только вместо функции Φ из (14) рассматривать функцию (18).

4. Уравнение Абеля. Как известно [15], одна из ограниченных версий 16-й проблемы Гильберта посвящена уравнению Абеля вида

$$\frac{dy}{du} = y^n + \sum_{0}^{n-1} R_i(u) y^i, \ \ y \in R, u \in [0; 2\pi],$$

где $R_i(u)$ являются непрерывными $2\pi-$периодическими функциями. Задача заключается в нахождении верхней границы для числа предельных циклов данного уравнения, которая выражается только через n. Доказано, что при $n \leq 3$ число предельных циклов не превосходит n. При $n = 4$ уравнение Абеля может иметь сколь угодно много предельных циклов. В связи с этим накладывают дополнительное требование на его коэффициенты и рассматривают R_i в виде тригонометрических полиномов степени не выше m. Однако и в этом случае проблема не решена даже при $m = 1$. Поэтому в работе [17] исследовались предельные циклы уравнения Абеля вида

$$\frac{dy}{du} = (a_1 \cos u + a_2 \sin u + a_3) y + (b_1 \cos u + b_2 \sin u + b_3) y^2 + (c_1 \cos u + c_2 \sin u + c_3) y^3, \quad (24)$$

$a_i, b_i, c_i \in R$, в котором при $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ для решения $y = 0$ вычислены три первые ляпуновские величины, которые определяют условия центра. Эти результаты подтолкнули нас рассмотреть однопараметрическое уравнение вида (24) с тремя предельными циклами.

Пример. Покажем эффективность наших подходов к исследованию предельных циклов второго рода на примере уравнения (24) при $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a$, $b_1 = 0.5$, $b_2 = -1$, $b_3 = -0.006$, $c_1 = -3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 0.7$. В этом случае функция $H_2 = 2R_2 + 6R_3 y$, и параметр a поворачивает поле как на верхнем полуцилиндре $y > 0$ так и на нижнем полуцилиндре $y < 0$. Все вычисления проводились в компьютерной системе "Mathematica". Для верхнего полуцилиндра с помощью предложенного метода [13] на отрезке $[0.01; 0.4]$ приближенно построена функция предельных циклов второго рода, принимающая после аппроксимации по методу наименьших квадратов вид

$$l_8(y) = -0.0000004 + 0.0600655y - 0.763151y^2 + 3.40977y^3 - 6.3235y^4 + 1.44336y^5 +$$

$$+16.1594y^6 - 29.1735y^7 + 17.0888y^8.$$

Она возрастает при $y \in [0; 0.0600164]$ и $y \in [0.232573; +\infty)$, убывает при $y \in [0.0600164; 0.232573]$, $A(0.0600164, 0.00151251)$ – точка максимума, $B(0.232573, -0.0003042)$ – точка минимума (рис. 1).

Подтверждение поведения функции $l(y)$ начнем с исследования монотонных участков на примере отрезка $I = [0.0009; 0.001]$, которому соответствует два промежутка возрастания и один промежуток убывания. Таким образом функция $l_8(y)$ для всех $a \in I$ дает прогноз существования трех предельных циклов у рассматриваемого уравнения в кольце D_v при $J_v = [0.0184; 0.37]$. Для его проверки в кольце D_v для всех $a \in I$ построена функция Дюлака Ψ вида (7) при $n_0 = 6$, $m_0 = 5$, $k = -0.8$. Поскольку соответствующая функция (14) линейно зависит от параметра a, то ее положительность достигалась с помощью выполнения условий (21) и (22) за счет решения задачи линейного программирования (23) на сетке с равномерным количеством узлов $n_u = 45$ вдоль оси u и $n_y = 15$ вдоль оси y. Построенная функция Дюлака в D_v определяет три кольца, в каждой из которых в соответствии с теоремой 2 уравнение имеет точно один предельный цикл. На рис. 2 изображены три предельных цикла при $a = 0.001$, светлые и темные полосы соответствуют кольцам, где $\Psi > 0$ и $\Psi < 0$. Следовательно, получаем подтверждение поведения функции $l(y)$ на всех трех промежутках монотонности, соответствующих выбранному отрезку I. Поведение функции $l(y)$ на других монотонных участках подтверждается аналогично. Конечно, легче строить функцию Ψ в кольце D_v, содержащей два или один промежуток монотонности, соответствующий отрезку I.

Далее исследование поведения функции $l(y)$ продолжим для доказательства простоты её точек экстремума с помощью теоремы 5 на примере точки максимума A. Сначала за счет решения задачи линейного программирования (8) построили функции Дюлака вида (7) для $a = 0.0015$ и $a = 0.0016$ и с их помощью убедились в существовании соответственно точно одного и трех предельных циклов уравнения в кольце D_v при $J_v = [0.02; 0.4]$. Затем для проверки точки A в кольце D_v, где $J_v = [0.02; 0.13]$, для всех $a \in I = [0.0015; 0.0016]$ построена функция Пуанкаре V, где Ψ имеет вид (7) при $n_0 = 6$, $m_0 = 5$, $k = 1$. Поскольку соответствующая функция (18) линейно зависит от параметра a, то ее положительность также достигалась с помощью выполнения условий (21) и (22) за счет решения задачи линейного программирования (23) на сетке с равномерным количеством узлов $n_u = 43$ вдоль оси u и $n_y = 11$ вдоль оси y. Построенная функция Пуанкаре на основании теоремы 5 позволяет сделать вывод о существовании у данного уравнения в окрестности A не более двух предельных циклов. Поведение функции $l(y)$ в окрестности точки минимума B подтверждается аналогично.

Подведем итоги оценки числа предельных циклов второго рода $N(a)$ рассмотренного уравнения Абеля на верхнем полуцилиндре:

при $a \in (0; -0.0003042)$ имеем $N = 0$,

при $a \approx -0.0003042$ имеем $N = 1$ (двукратный полуустойчивый предельный цикл),

при $a \in (-0.0003042; 0)$ имеем $N = 2$,

при $a \in (0; 0.00151251)$ имеем $N = 3$

при $a \approx 0.00151251$ имеем $N = 2$ (один грубый и один двукратный полуустойчивый предельный цикл),

при $a \in (0.00151251; 0.0025)$ имеем $N = 1$.

Аналогично проводится построение и исследование функции $l(y)$ на нижнем полуцилиндре рассмотренного уравнения Абеля.

Литература.

1. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., 1976.

2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М., 1981.

3. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М., 1969.

4. *Черкас Л.А.* Функция Дюлака полиномиальных автономных ситем на плоскости // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, №5. С.689 – 699.

5. *Гринь А.А., Черкас Л.А.* Функция Дюлака для систем Льенара // Труды Института математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С.29 – 38.

6. *Черкас Л.А., Гринь А.А.* Алгебраические аспекты нахождения функции Дюлака для полиномиальных автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2001. Т.37, №3. С.384 – 390.

7. *Черкас Л.А., Гринь А.А.* Функции Дюлака и 16-я проблема Д. Гильберта для некоторых полиномиальных семейств систем Льенара // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. 2001. Серия 2. №2. С. 7–17.

8. *Черкас Л.А.* Точная оценка числа предельных циклов автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, №6. С.759 – 768.

9. *Черкас Л.А.* Оценка числа предельных циклов с помощью критических точек условного экстремума // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, №10. С.1334 – 1342.

10. *Черкас Л.А., Гринь А.А.* Сплайн-аппроксимации в задаче оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2006. Т.42, №2. С.213 – 220.

11. *Гринь А.А.* Редукция к трансверсальности кривых в задаче построения функций Дюлака-Черкаса // Дифференц. уравнения. 2006. Т.42, №6. С.840 – 843.

12. *Гринь А.А., Черкас Л.А.* Экстремумы функции Андронова-Хопфа полиномиальной системы Льенара // Дифференц. уравнения. 2005. Т.41, №1. С.50 – 60.

13. *Cherkas L.A., Grin A.A., Schneider K.R.* On the approximation of the limit cycles function // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2007. №28. P.1 – 11; http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/.

14. *Черкас Л.А., Гринь А.А.* Функция Дюлака для динамических систем на цилиндре // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. 2007. Серия 2. №2. С. 3–8.

15. *Ilyashenko Y.* Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bulletin of the AMS. 2002. Vol. 39. №3. P. 301 - 354.

16. *Черкас Л.А., Гринь А.А.* Об использовании производных отображения Пуанкаре для оценки числа предельных циклов // Вестник ГрГУ им. Я. Купалы. 2006. Серия 2. №3(46). С. 3–10.

17. *Alvarez M.J., Gasull A., Giacomini H.* A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations // Journal of Differential Equations. 2007. №234. P.161 – 176.