Об одном подходе к вычислению норм различных интерполяционных процессов.

Е. А. Ровба и К. А. Смотрицкий (Гродно, Беларусь)

Задача о нахождении нормы аппроксимирующей функции является одной из классических в теории приближений. При условии вычисления нормы, применяя теорему Лебега, можно судить о скорости приближения рассматриваемым оператором в том или ином функциональном пространстве.

В данной работе исследуются нормы интерполяционных рациональных процессов в пространстве квадратично суммируемых функций как на конечном отрезке, так и на всей числовой прямой. При этом для вычисления соответствующих интегралов применяется метод В.Н. Русака, связанный с выводом параметра в комплексную плоскость.

Проиллюстрируем результаты на следующем примере. Рассмотрим интерполяционную функцию Лагранжа с узлами в нулях x_k, $k = 1, \ldots, n$, косинус-дроби Чебышева-Маркова $M_n(x)$, построенную для функции $f \in C[-1;1]$:

$$L_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{(-1)^n M_n(x)\sqrt{1-x_k^2}}{\lambda_n(x_k)(x-x_k)}, \quad \lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}.$$

Теорема. Для любой функции $f \in C[-1;1]$ справедливо соотношение

$$\int_{-1}^{1} \frac{|L_{n-1}(x;f)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{f^2(x_k)}{\lambda_n(x_k)}.$$

Обозначим через $L_2(\rho) = L_2(\rho; [-1;1])$ пространство квадратично суммируемых по Лебегу с весом $\rho = \rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ функций с нормой

$$\|f\|_{L_2(\rho)} = \left(\int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2}.$$

На основании полученого результата можно вычислить норму оператора $L_{n-1} : C[-1;1] \to L_2(\rho; [-1;1])$:

$$\|L_{n-1}\|_{C \to L_2(\rho)} = \sqrt{\pi}$$

и, как следствие, оценить погрешность приближения функции $f \in C[-1;1]$ в пространстве $L_2(\rho)$.

Результаты исследования опубликованы в работах [1] и [2].

Литература.

1. *Ровба Е.А., Смотрицкий К.А.* Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева-Маркова. *Докл. НАН Беларуси* Т.**52** (5)(2008) 11-15.

2. *Ровба Е.А., Смотрицкий К.А.* Сходимость в среднем интерполяционных рациональных процессов в нулях дробей Бернштейна. *Вести НАН Беларуси* №3(2010) 5-9.