ОЦЕНКА ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ВТОРОГО РОДА АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НА ЦИЛИНДРЕ

Черкас Л.А.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

cherkas@inp.by

Гринь А.А.

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

grin@grsu.by

Разработанный нами ранее подход [1, 2] к решению проблемы оценки числа и локализации предельных циклов для автономных систем на плоскости с помощью вспомогательных функций Дюлака и Пуанкаре распространен на автономные системы дифференциальных уравнений с цилиндрической фазовой поверхностью

$$\frac{du}{dt} = P(u, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(u, y, a), \tag{1}$$

зависящую от скалярного параметра $a \in I \subset R$, в которой P, $Q \in C^1(\Omega_c)$, $\quad \Omega_c \subseteq R^2$, а также являются периодическими функциями u с периодом 2π. Будем рассматривать систему (1) в кольцеобразной области D, охватывающей цилиндр Ω_c и удовлетворяющей следующим условиям: (i) $D = \{(u, y) : u \in [u_0, u_0 + 2\pi], \gamma_1 = \gamma_1(u) \leq y \leq \gamma_2 = \gamma_2(u), \gamma_1(u_0) = \gamma_1(u_0 + 2\pi), \gamma_2(u_0) = \gamma_2(u_0 + 2\pi)\}$, причем функции γ_1 и γ_2 задают непересекающиеся кривые ($\gamma_1 < \gamma_2$); (ii) в области D нет особых точек системы (1). Наш подход основан на следующем определении.

Определение. $2\pi-$периодическая по u функция $\Psi(u, y) \in C^1(D)$ называется функцией Дюлака системы (1) в области D, если существует действительное число $k \neq 0$ такое, что в D выполняется неравенство $\Phi := k\Psi divX + \frac{\partial\Psi}{\partial u}P + \frac{\partial\Psi}{\partial y}Q > 0$ (< 0).

В этом случае $B := |\Psi|^{\frac{1}{k}}$ представляет собой функцию Дюлака в классическом варианте в каждой из подобластей D, где Ψ является положительной или отрицательной, а предельные циклы системы (1), целиком расположенные в D, не пересекают кривую $\Psi = 0$. С помощью указанного свойства доказывается следующее обобщение критерия Дюлака для области D.

Теорема. *Пусть* Ψ *является функцией Дюлака системы (1) в области* D, *удовлетворяющей условиям (i) и (ii). При этом кривая* $\Psi = 0$ *состоит из* s *овалов* $w_1, w_2, ..., w_s$, *охватывающих цилиндр, и разбивает* D *на* $s+1$ *кольцо* $\gamma_1 < w_1 < w_2 < ... < w_s < \gamma_2$. *Тогда при отрицательном* k *система (1) имеет в каждом из* $s-1$ *кольце между соседними овалами точно один предельный цикл второго рода, а всего система в области* D *может иметь не более* $s+1$ *таких предельных циклов (по одному циклу может быть между* γ_1 *и* w_1, *а также между* γ_2 *и* w_s*).*

Рассмотрены все принципиальные аспекты, отличные от классического подхода, касающиеся предельных циклов второго рода. В частности справедлива

Лемма. *Если* $P(u,y,a) > 0$ *в области* D_v, *то систему (1) можно записать в эквивалентной форме*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Q(u,y,a)}{P(u,y,a)} = R(u,y,a), \frac{du}{dt} = 1, \tag{2}$$

для которой предельный цикл второго рода Γ *имеет кратность, равную: 1) единице при* $h_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial y} du \neq 0$, *2) двум при* $h_1 = 0,\ h_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial y} du\right) du \neq 0.$

Учитывая, что одна из ограниченных версий 16-й проблемы Гильберта посвящена уравнению Абеля [3], мы покажем эффективность наших подходов к исследованию предельных циклов второго рода на примере уравнения вида

$$\frac{dy}{du} = (a_1 \cos u + a_2 \sin u + a_3)y + (b_1 \cos u + b_2 \sin u + b_3)y^2 + (c_1 \cos u + c_2 \sin u + c_3)y^3, \tag{3}$$

при $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = a$, $b_1 = 0.5$, $b_2 = -1$, $b_3 = -0.006$, $c_1 = -3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 0.7$.

Литература.

1. *Гринь А.А., Черкас Л.А.* Экстремумы функции Андронова-Хопфа полиномиальной системы Льенара // Дифференц. уравнения. 2005. Т.41, №1. С.50 – 60.

2. *Cherkas L.A., Grin A.A., Schneider K.R.* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2007. №28. P.1 – 11.

3. *Ilyashenko Y.* Centennial history of Hilbert's 16th problem, Bulletin of the AMS. 2002. Vol. 39. №3. P. 301 - 354.