УДК 513.51

Е.А. РОВБА, Е.А. СЕТЬКО, К.А. СМОТРИЦКИЙ

О СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Резюме.

Объектом исследования данной работы являются тригонометрические интерполяционные рациональные функции Лагранжа. Целью исследования – изучение аппроксимационных свойств указанных функций в пространстве квадратично суммируемых функций.

Во введении указана актуальность темы исследования, приведены ссылки некоторые работы, связанные с данной статьей. Также описано построение аппарата приближения – тригонометрических интерполяционных рациональных функций Лагранжа.

В основной части работы вычислена норма тригонометрической интерполяционной рациональной функции Лагранжа в пространстве квадратично суммируемых функций. На основании этого результата получена норма соответствующего интерполяционного оператора, действующего из пространства непрерывных 2π-периодических функций в пространство функций, интегрируемых в квадрате. Это позволило оценить погрешность приближения произвольной 2π-периодической функции посредством тригонометрических интерполяционных рациональных функций Лагранжа в пространстве квадратично суммируемых функций через наилучшие равномерные рациональные приближения данной функции.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования свойств интерполяционных рациональных функций и приближений ими в различных функциональных пространствах.

Ключевые слова: тригонометрическая интерполяционная рациональная функция Лагранжа, норма интерполяционного оператора, приближение в пространстве квадратично суммируемых функций.

E.A. Rovba, E.A. Setko, K.A. Smotritski. On the convergence in the mean of the trigonometric interpolating rational processes.

The object of study is trigonometric interpolating rational Lagrange functions. The aim of the research - the study of approximation properties of these functions in the space of square integrated functions.

In the introduction the relevance of the research is indicated, references to some works related to this article are given. We also describe the construction of the apparatus of approximation – trigonometric interpolating rational Lagrange functions.

In the main part the norm of the trigonometric interpolating rational function in the space of the square integrated functions is calculated. Based on this result, the norm of the corresponding interpolating operator from the space of continuous 2π-periodic functions to the space of square integrated functions is obtained. This enabled us to estimate the error of the approximation of an arbitrary 2π-periodic function by trigonometric interpolating rational Lagrange functions in the space of square integrated functions in terms of best uniform rational approximation of this function.

The results can be used for further investigation of the properties of interpolating rational functions and their approximations in various functional spaces.

Keywords: trigonometric interpolating rational Lagrange function, the norm of the interpolating process, approximation in the space of square integrated functions.

Введение. Изучение норм тем или иных аппроксимационных методов является одной из наиболее важных проблем теории приближений. В работах [1] и [2] были рассмотрены вопросы, связанные со сходимостью интерполяционных рациональных операторов в пространстве суммируемых в квадрате функций в непериодическом случае на конечном отрезке и всей вещественной прямой. В настоящей работе рассматривается тригонометрический интерполяционный рациональный процесс.

Следуя статье [3], опишем построение исследуемой интерполяционной функции Лагранжа.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=0}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям $\alpha_0 = 0$, $|\alpha_k| < 1$, $k \in \mathbf{N}$. Введем следующие обозначения

$$\lambda_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k|\cos(u - \theta_k) + |\alpha_k|^2}, \qquad \theta_k = \arg\alpha_k;$$

$$\lambda_n(x, y) = \int_x^y \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(u) \right) du.$$

Функция $\sin\lambda_n(0, y)$ имеет $(2n+1)$ нулей на промежутке $[0; 2\pi)$. Обозначим их x_k, $k = 0, \ldots, 2n$:

$$\int_0^{x_k} \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(u) \right) du = k\pi, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Для произвольной непрерывной 2π-периодической функции $f \in C_{2\pi}$ рассмотрим интерполяционную рациональную тригонометрическую функцию Лагранжа $G_n(x; f)$ с узлами в точках x_k, $k = 0, \ldots, 2n$

$$G_n(x; f) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f(x_k)}{1 + 2\lambda_n(x_k)} D_n(x, x_k), \tag{1}$$

где

$$D_n(x, x_k) = \frac{\sin\lambda_n(x_k, x)}{\sin\frac{x - x_k}{2}}.$$

В дальнейшем в работе существенным образом используется известное представление (см. [4])

$$D_n(x, y) = \frac{1}{\xi - z} \left(\xi \frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(z)} - z \frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\xi)} \right), \quad z = e^{ix}, \ \xi = e^{iy}, \tag{2}$$

при этом через ω_n обозначено произведение Бляшке для круга

$$\omega_n(\eta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\eta - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}\eta}.$$

Основная часть. Для рассматриваемой интерполяционной функции Лагранжа $G_n(x; f)$ имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in C_{2\pi}$ *имеет место соотношение*

$$\int_0^{2\pi} \left| G_n(x; f) \right|^2 dx = 2\pi \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^2(x_k)}{1 + 2\lambda_n(x_k)}. \tag{3}$$

Доказательство. Используя равенство (1), получим

$$\int_0^{2\pi} \left| G_n(x; f) \right|^2 dx = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{1 + 2\lambda_n(x_k)} D_n(x, x_k) \right)^2 dx =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{2n} f^2(x_k)\frac{D_n^2(x,x_k)}{(1+2\lambda_n(x_k))^2}+2\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{l=k+1}^{2n} f(x_k)f(x_l)\frac{D_n(x,x_k)D_n(x,x_l)}{(1+2\lambda_n(x_k))(1+2\lambda_n(x_l))}\right)dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}\frac{f^2(x_k)}{(1+2\lambda_n(x_k))^2}\cdot I_{1k}+2\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{l=k+1}^{2n}\frac{f(x_k)f(x_l)}{(1+2\lambda_n(x_k))(1+2\lambda_n(x_l))}\cdot I_{1kl},$$

где

$$I_{1k}=\int_0^{2\pi} D_n^2(x,x_k)dx,\ k=0,1,...,2n; \tag{4}$$

$$I_{2kl}=\int_0^{2\pi} D_n(x,x_k)D_n(x,x_l)dx,\ k=0,1,...,2n-1,\ l=k+1,...,2n. \tag{5}$$

Вначале вычислим интегралы (4). Сделаем замену $z=e^{ix}$ и воспользуемся соотношением (2). Тогда

$$I_{1k}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\left(z_k\frac{\omega_n(z_k)}{\omega_n(z)}-z\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(z_k)}\right)^2\frac{dz}{z(z_k-z)^2},\ z_k=e^{ix_k},\ k=0,1,...,2n.$$

Теперь воспользуемся приемом, описанным, например, в [5, стр. 92]. Найдем интеграл

$$J_1(\xi)=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\left(\xi\frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(z)}-z\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\xi)}\right)^2\frac{dz}{z(\xi-z)^2},\ \xi=e^{iy},\ |\xi|<1.$$

Представим его в виде суммы

$$J_1(\xi)=\frac{1}{i}\left(\xi^2\omega_n^2(\xi)J_1'(\xi)-2\xi J_1''(\xi)+\frac{1}{\omega_n^2(\xi)}J_1'''(\xi)\right), \tag{6}$$

где

$$J_1'(\xi)=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(\xi-z)^2\omega_n^2(z)},\ J_1''(\xi)=\int_{|z|=1}\frac{dz}{(\xi-z)^2},\ J_1'''(\xi)=\int_{|z|=1}\omega_n^2(z)\frac{zdz}{(\xi-z)^2}.$$

Подынтегральная функция интеграла $J_1'(z)$ не имеет особых точек вне единичной окружности. Поэтому,

$$J_1'(\xi)=0. \tag{7}$$

Аналогично

$$J_1''(\xi)=0. \tag{8}$$

Подынтегральная функция интеграла $J_1'''(z)$ внутри единичной окружности имеет полюс второго порядка в точке $z=\xi$. Значит,

$$J_1'''(\xi)=2\pi i\operatorname*{res}_{z=\xi}\left(\frac{z\omega_n^2(z)}{(\xi-z)^2}\right)=2\pi i\lim_{z\to\xi}\frac{d(z\omega_n^2(z))}{dz}.$$

Замечая, что

$$\frac{d\omega_n(z)}{dz}=\frac{\omega_n(z)}{z}\lambda_n(x),$$

получим

$$J_1'''(\xi) = 2\pi i \lim_{z\to\xi}\left(\omega_n^2(z) + 2\omega_n^2(z)\lambda_n(x)\right) = 2\pi i\omega_n^2(\xi)\left(1+2\lambda_n(y)\right). \qquad (9)$$

Теперь подставим найденные значения интегралов (7), (8) и (9) в соотношение (6). Будем иметь

$$J_1(\xi) = 2\pi\left(1+2\lambda_n(y)\right).$$

Для вычисления интегралов (4) осталось воспользоваться предельным переходом при $\xi \to z_k$ (при этом, очевидно, $y \to x_k$). Тогда

$$J_{1k} = \lim_{\xi\to z_k, |\xi|<1} J_1(\xi) = 2\pi\left(1+2\lambda_n(x_k)\right), \; k = 0,1,\dots,2n.$$

Теперь займемся интегралами (5). Поступая аналогичным образом, будем иметь

$$I_{2kl} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\left(z_k\frac{\omega_n(z_k)}{\omega_n(z)} - z\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(z_k)}\right)\left(z_l\frac{\omega_n(z_l)}{\omega_n(z)} - z\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(z_l)}\right)\frac{dz}{z(z_k-z)(z_l-z)},$$

$$z_k = e^{ix_k}, \; z_l = e^{ix_l}, \; k = 0,1,\dots,2n, \; l = k+1,\dots,2n.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_2(\xi,\eta) = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\left(\xi\frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(z)} - z\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\xi)}\right)\left(\eta\frac{\omega_n(\eta)}{\omega_n(z)} - z\frac{\omega_n(z)}{\omega_n(\eta)}\right)\frac{dz}{z(\xi-z)(\eta-z)},$$

$$\xi = e^{iy}, \; \eta = e^{it}, \; |\xi|<1, \; |\eta|<1.$$

Проведя несложные преобразования, получим

$$J_2(\xi,\eta) = \frac{1}{i}\left(\xi\eta\omega_n(\xi)\omega_n(\eta)J_2'(\xi,\eta) - \left(\xi\frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\eta)} - \eta\frac{\omega_n(\eta)}{\omega_n(\xi)}\right)J_2''(\xi,\eta) + \frac{1}{\omega_n(\xi)\omega_n(\eta)}J_2'''(\xi,\eta)\right),$$

где

$$J_2'(\xi,\eta) = \int_{|z|=1}\frac{dz}{z(\xi-z)(\eta-z)\omega_n^2(z)}, \; J_2''(\xi,\eta) = \int_{|z|=1}\frac{dz}{(\xi-z)(\eta-z)}, \; J_2'''(\xi,\eta) = \int_{|z|=1}\omega_n^2(z)\frac{zdz}{(\xi-z)(\eta-z)}.$$

В силу аналитичности подынтегральных функций вне единичной окружности

$$J_2'(\xi,\eta) = J_2''(\xi,\eta) = 0.$$

Для интеграла будем иметь

$$J_2'''(\xi,\eta) = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=\xi}\frac{z\omega_n^2(z)}{(\xi-z)(\eta-z)} + \operatorname*{res}_{z=\eta}\frac{z\omega_n^2(z)}{(\xi-z)(\eta-z)}\right) = 2\pi i\left(\frac{\xi\omega_n^2(\xi)}{\xi-\eta} - \frac{\eta\omega_n^2(\eta)}{\xi-\eta}\right).$$

Тогда

$$J_2(\xi,\eta) = 2\pi\left(\xi\frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\eta)} - \eta\frac{\omega_n(\eta)}{\omega_n(\xi)}\right).$$

Переходя к пределу, получим

$$I_{2kl} = \lim_{\substack{\xi\to z_k, |\xi|<1\\ \eta\to z_k, |\eta|<1}} J_2(\xi,\eta) = 2\pi D_n(x_k, x_l) = 0, \; k = 0,1,\dots,2n, \; l = k+1,\dots,2n.$$

Окончательно,

$$\int_0^{2\pi}|G_n(x;f)|^2\,dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^2(x_k)}{\left(1+2\lambda_n(x_k)\right)^2}\cdot 2\pi\left(1+2\lambda_n(x_k)\right)=2\pi\sum_{k=0}^{n}\frac{f^2(x_k)}{1+2\lambda_n(x_k)}.$$

Теорема 1 доказана.

Через L_2 обозначим множество 2π-периодических функций, квадратично суммируемых по Лебегу с нормой

$$\|f\|_{L_2}=\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\|G_n\|_{C_{2\pi}\to L_2}=\sqrt{2\pi}\ .$$

Доказательство. Пусть $f\in C_{2\pi}$. Учитывая соотношение (3) и лемму работы [3], можно записать

$$\|G_n(x;f)\|_{L_2}\le\sqrt{2\pi}\sqrt{\sum_{k=0}^{2n}\frac{f^2(x_k)}{1+2\lambda_n(x_k)}}\le\sqrt{2\pi}\sqrt{\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+2\lambda_n(x_k)}}\,\|f\|_{C_{2\pi}}=\sqrt{2\pi}\,\|f\|_{C_{2\pi}}\ .$$

С другой стороны, если $f(x)\equiv 1$, то

$$\|G_n(x;f)\|_{C_{2\pi}\to L_2}=\sup_{f\in C_{2\pi},\|f\|\le 1}\|G_n(x;f)\|_{L_2}\ge\|G_n(x;1)\|_{L_2}=\|1\|_{L_2}=\sqrt{2\pi}\ .$$

Следствие доказано.

Теорема 2. *Для любой функции* $f\in C_{2\pi}$ *погрешность ее приближения в пространстве* L_2 *посредством интерполяционной функции* $G_n(x;f)$ *может быть оценена неравенством*

$$\|f(x)-L_n(x;f)\|_{L_2}\le 2\sqrt{2\pi}R_n(f,a),$$

где $R_n(f,a)=\inf\limits_{r_n}\max\limits_{x\in\mathbf{R}}|f(x)-r_n(x)|$ — *наилучшее приближение функции* f *тригонометрическими рациональными функциями, с соответствующими полюсами.*

Доказательство. Пусть r_n^* — рациональная функция наилучшего равномерного приближения. В силу следствия и того, что $G_n(x;r_{2n}^*)\equiv r_n^*(x)$ получим

$$\|f(x)-G_n(x;f)\|_{L_2}\le\|f(x)-r_n^*(x)\|_{L_2}+\|G_n(x;f)-r_n^*(x)\|_{L_2}\le$$

$$\le\|f-r_n^*\|_{C_{2\pi}}\cdot\|1\|_{L_2}+\|G_n\|_{C_{2\pi}\to L_2}\cdot\|f-r_n^*\|_{C_{2\pi}}\le 2\sqrt{2\pi}R_n(f,a)\ .$$

Теорема 2 доказана.

Заключение. В работе вычислена норма тригонометрической интерполяционной рациональной функции Лагранжа в пространстве квадратично суммируемых функций. На основании этого результата получена норма соответствующего интерполяционного оператора, действующего из пространства непрерывных 2π-периодических функций в пространство функций, интегрируемых в квадрате и оценена погрешность приближения произвольной 2π-периодической функции посредством тригонометрических интерполяционных рациональных функций Лагранжа в пространстве квадратично суммируемых функций через наилучшие равномерные рациональные приближения данной функции.

Литература

1. Ровба, Е.А. Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева-Маркова / Е.А. Ровба, К.А. Смотрицкий // Доклады НАН Беларуси. – 2008. – Т.52. №5. – С. 11–15.

2. Ровба, Е.А. Сходимость в среднем интерполяционных рациональных процессов в нулях дробей Бернштейна // Е.А. Ровба, К.А. Смотрицкий / Весцi НАН Беларусi. – 2010. №3. – С. 5–9.

3. Ровба, Е.А. Интерполяционные рациональные функции типа Фейера – Бернштейна / Е.А. Ровба // Вестник БГУ. Сер. 1. – 1991. – №2. – С. 75–77.

4. Джрбашян, М.М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М.М. Джрбашян // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1956. – Т.9. №7. – С. 3–28.

5. Русак, В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. — Минск: Изд-во БГУ, 1979. — 176 с.

Ровба Евгений Алексеевич — ректор Гродненского государственного университета им. Я.Купалы, профессор, доктор физико-математических наук.

Сетько Елена Александровна — доцент кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Я.Купалы, кандидат физико-математических наук.

Смотрицкий Константин Анатольевич — доцент кафедры теории функций, функционального анализа и прикладной математики Гродненского государственного университета им. Я.Купалы, кандидат физико-математических наук.