ISSN 2076-4847

MCMXL

Веснік

Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы

Серыя 2

Матэматыка

Фізіка

Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне

1 (148), 2013

УДК 517.51;517.53

А.А. Пекарский, Е.А. Ровба

БЕЛОРУССКАЯ ШКОЛА ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ *

В качестве объекта исследования выступают вопросы теории равномерных рациональных приближений. Предметом исследования являются результаты, полученные в этом направлении белорусскими учеными. Теория рациональной аппроксимации функций основана великим русским математиком П.Л. Чебышёвым в середине XIX в. Материал, который можно отнести к указанной области, весьма обширен. Данное исследование ограничено, во-первых, рассмотрением равномерных приближений, во-вторых, аппроксимацией функций, заданных на канонических множествах – на отрезке, на прямой и в круге, в-третьих, основными результатами, полученными белорусской школой рациональной аппроксимации функций, а также результатами других авторов, связанными с указанными результатами. Приводятся и обсуждаются результаты зарубежных авторов – А.А. Гончара, Е.П. Долженко, Д. Ньюмена, В.А. Попова, П.П. Петрушева, Я.-Э. Андерссона и др., а также результаты белорусских авторов – В.Н. Русака, А.П. Старовойтова, авторов данного исследования и некоторых их учеников. Рассмотрены задачи аппроксимации функций посредством рациональных функций с оптимальным выбором числителя и знаменателя. Такой метод аппроксимации называют аппроксимацией со сводными полюсами. Приведены различные результаты о приближении классов функций, для которых рациональная аппроксимация со свободными полюсами существенно лучше, чем полиномиальная, в частности, рассмотрены функции с характерными особенностями, функции ограниченной вариации, выпуклые функции и функции с дробной производной, принадлежащей заданному классу, функции Маркова и преобразование Коши комплексного борелевского заряда. Рассмотрены задачи аппроксимации функций посредством рациональных функций с ограничением на количество полюсов или на их расположение. Приведены задачи аппроксимации функций с помощью специальных методов, а именно с помощью интерполяционных процессов и с помощью операторов Фурье по ортогональным системам рациональных функций Такенака–Мальмквиста и Джрбашяна–Китбаляна. В работе сформулированы нерешенные задачи. Результаты исследования могут быть применены при дальнейших исследованиях по теории рациональных приближений, а также для решения некоторых задач численного анализа

Ключевые слова: рациональные функции, наилучшие приближения, теорема типа Джексона, теорема типа Бернштейна, преобразование Коши, функции Маркова, пространство Харди, ортогональная система Такенака–Мальмквиста, ортогональная система Джрбашяна–Китбаляна.

1. Первые шаги современной теории рациональной аппроксимаций функций. Пусть $C[a,b]$ – банахово пространство непрерывных действительных функций f, определенных на отрезке $[a, b]$ и наделенных нормой $\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Через $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{R}_n$ обозначим соответственно множества алгебраических полиномов и рациональных функций степени не выше n, $n = 0, 1, 2,\ldots$. Введем наилучшие равномерные полиномиальное и рациональное приближения функции f:

$$E_n(f) = E_n(f, [a,b]) = \inf_{p_n\in\mathcal{P}_n} \| f - p_n \|_{C[a,b]},$$

$$R_n(f) = R_n(f,[a, b]) = \inf_{r_n\in\mathcal{R}_n} \| f - r_n \|_{C[a,b]}.$$

Ясно, что последовательности $\{E_n(f)\}$ и $\{R_n(f)\}$ не возрастают. Поскольку $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{R}_n$, то $R_n(f) < E_n(f)$. Из теоремы Вейерштрасса следует, что $E_n(f)\to 0$ и $R_n(f)\to 0$ при $n\to\infty$.

Задачи об определении или оценках $R_n(f)$, а также о нахождении функций из $\mathcal{R}_n$, реализующих соответствующий порядок аппроксимации, относятся к теории аппроксимации функций посредством рациональных функций со свободными полюсами. Аналогичная задача

Пекарский Александр Антонович, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теории функций БГУ (Беларусь).
Адрес для корреспонденции: пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь; e-mail: pekarskii@gmail.com

Ровба Евгений Алексеевич, д-р физ.-мат. наук, проф., ректор ГрГУ им. Янки Купалы (Беларусь).
Адрес для корреспонденции: ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Беларусь; e-mail: rovba@grsu.by

для $E_n(f)$ относится к теории аппроксимации функций посредством рациональных функций с фиксированными полюсами. Действительно, функции из $\mathcal{P}_n$ могут иметь лишь один полюс в бесконечно удаленной точке.

Задачи о наилучшем равномерном полиномиальном и рациональном приближениях непрерывных функций поставил в середине XIX в. П.Л. Чебышёв [1]. Самим П.Л. Чебышёвым и его учениками Е.И. Золотарёвым и А.А. Марковым были выполнены первые основополагающие исследования, а именно были получены критерии полиномов и рациональных функций наилучшего приближения и с использованием этих критериев найдены элементы наилучшего приближения, а также точные значения наилучших приближений некоторых элементарных функций (см. [2; 3]).

Теория полиномиальных приближений функций, или теория приближений функций посредством рациональных функций с фиксированными полюсами, к настоящему времени в целом завершена. Фундаментальные результаты в этой области получили К. Вейерштрасс, К. Рунге, Е. Борель, А. Лебег, Д. Джексон, Дж.Л. Уолш, А.Н. Колмогоров, С.Н. Бернштейн, С.М. Никольский, С.Н. Мергелян и другие известные математики.

Что касается наилучших приближений функций рациональными функциями со свободными полюсами, то после работ П.Л. Чебышёва, Е.И. Золотарёва и А.А. Маркова работы других авторов в этой области на протяжении столетия появлялись лишь эпизодически. Объяснением этому является то, что множество $\mathcal{R}_n \bigcap C[a,b]$ нелинейно при любом фиксированном $n \geq 1$.

По инициативе А.Н. Колмогорова и С.Н. Мергеляна в середине XX в. в СССР были начаты исследования по теории аппроксимации функций рациональными функциями со свободными полюсами. Первые фундаментальные результаты в современной теории рациональных приближений получили А.А. Гончар и Е.П. Долженко. В 1955–1966 гг. они опубликовали серию работ (см., например, [4–9]), посвященных обратным теоремам рациональной аппроксимации в пространстве $C[a,b]$. А.А. Гончар [7] сделал важный вывод о том, что существуют непрерывные функции, для которых $R_n(f) \to 0$ сколь угодно быстро, тогда как $E_n(f) \to 0$ сколь угодно медленно.

Д. Ньюмен [10] в 1964 г. впервые привел пример элементарной функции, рациональная аппроксимация которой существенно эффективней, чем полиномиальная. Такой функцией оказалась функция $|x|$. Именно Д. Ньюмен получил следующий результат:

$$\frac{1}{2}e^{-9\sqrt{n}} < R_n(|x|,[-1,1]) \leq 3e^{-\sqrt{n}}, \quad n \geq 4. \tag{1}$$

Отметим, что к настоящему времени этот результат существенно улучшен (см., например, [11]). Напомним, С.Н. Бернштейн [12] доказал существование $\beta = 0,2801...$, такого, что

$$E_n(|x|, [-1, 1]) \sim \frac{\beta}{n}, \quad n \to \infty.$$

Конструкция рациональной функции, осуществляющей верхнюю оценку в (1), оказалась весьма полезной для получения прямых теорем рациональной аппроксимации со свободными полюсами, а именно для отыскания классов функций, рациональная аппроксимация которых лучше, в смысле порядка, чем полиномиальная. Первые результаты в указанном направлении получили в 1965–1968 гг. П. Сюс и П. Туран [13–15], исследования которых продолжили А.А. Гончар [16; 17], Е.П. Долженко (см. [18]), Г. Фройд [19; 20], А.П. Буланов [21–23] и некоторые другие авторы. Приведем один из результатов указанного типа (см. [17]).

Если функция $f \in C[0,1]$ *и допускает ограниченное аналитическое продолжение в круг* $U = \{z : |z-1| < 1\}$, *то*

$$R_n(f, [0, 1]) < c_1 \cdot \inf_{1 \leq t < +\infty} \left(Mt \exp\left(-\frac{c_2 n}{t}\right) + \omega_f\left(\exp(-t)\right) \right), \tag{2}$$

где $M = \sup_{z \in U} |f(z)|$, ω_f *– модуль непрерывности функции f на* $[0,1]$.

Здесь и далее через $c, c_1, c_2, ...$ мы обозначаем абсолютные положительные постоянные; $c(...), c_1(...), c_2(...), ...$ – положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Естественно стремление многих авторов получить точные по порядку оценки равномерных рациональных приближений на классах функций, для которых рациональная аппроксимация существенно лучше полиномиальной. Первым результатом, полученным в указанном направлении, является следующий результат В.А. Попова [24].

Пусть $V_r = V_r[a,b]$, $r \in \mathbb{N}$, *– класс функций f, определенных на отрезке* $[a,b]$, *имеющих на нем* $(r-1)$*-ю абсолютную непрерывную производную* $f^{(r-1)}$, *причем* $f^{(r)}$ *есть функция ограниченной вариации* $\mathrm{Var}(f^{(r)})$. *Тогда для* $f \in V_r$ *имеет место неравенство*

$$R_n(f) \le c(r)\frac{\mathrm{Var}(f^{(r)})(b-a)^r}{n^{r+1}},\ n \ge r. \tag{3}$$

Легко убедиться, что если $f \in V_r$, то для полиномиальных приближений справедлива точная оценка

$$E_n(f) \le c(r)\frac{\mathrm{Var}(f^{(r)})(b-a)^r}{n^r},\ n \ge r.$$

На случай дробных производных функции f порядка $r > 0$ в смысле Римана–Лиувилля результат В.А. Попова (3) был обобщен А.П. Старовойтовым [25].

А.А. Пекарский [26] и П.П. Петрушев [27] одновременно и независимо получили следующий результат.

Если $f \in C[0, 1]$ *и имеет ограниченную вариацию, то*

$$R_n(f) < c \inf_{1 \le t < +\infty}\left(\frac{\mathrm{Var}(f)}{t} + \omega_f\left(\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n}{t}\right)\right)\right),\quad n \ge 1. \tag{4}$$

Эта оценка является точной на классе функций $f \in C[0, 1]$, для которых $\mathrm{Var}(f) < \nu$ и $\omega_f(\delta) \le \omega(\delta)$, $0 < \delta < 1$, где $\nu > 0$ – заданное число и $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности.

Для выпуклых функций $f \in C[0, 1]$ А.А. Пекарским [28] была установлена следующая окончательная оценка:

$$R_n(f) \le \frac{c}{n^2}\left(\int_{e^{-n}}^{1}\sqrt{\frac{\omega_f(x)}{|\ln x|}}\frac{dx}{x}\right)^2,\ n > 1. \tag{5}$$

Этот результат подвел итог серии работ Г. Фройда [19], А.П. Буланова [21; 22; 29], П.П. Петрушева [30], В.А. Попова и П.П. Петрушева [31], А. Хатамова [32] и работ других авторов, посвященных наилучшим рациональным приближениям выпуклых функций.

2. Рациональная аппроксимация периодических функций, представимых в виде свертки. В полиноминальном случае наиболее простым и естественным аппаратом приближений непрерывных функций являются частные суммы рядов Фурье и интерполяционные полиномы. Целесообразно обратиться к ним и в случае рациональной аппроксимации.

В 1925–1926 гг. С. Такенака [33] и Ф. Мальмквист [34] ввели ортогональную систему рациональных функций, обобщающую основную тригонометрическую систему. В 1956 г. М.М. Джрбашян [35] рассмотрел рациональные ряды Фурье по данной системе и, в частности, нашел компактное выражение для ядра Дирихле. Исследование в этом направлении продолжил В.Н. Русак. Им построены [36] рациональные операторы, являющиеся аналогами полиномиальных операторов Фейера, Джексона и Валле-Пуссена, а также исследованы их аппроксимационные свойства. В.Н. Русак применил построенные им операторы для нахождения новых классов функций, отражающих особенности рациональной аппроксимации. Таким классом, например, оказался $W^r_{2\pi}V$ – класс 2π-периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций f. Ясно, что в данном случае $R_n(f)$ означает наилучшее равномерное приближение непрерывной 2π-периодической функции f посредством тригонометрических рациональных функций степени не выше n.

Пусть $W^r_{2\pi}V$, $r > 0$, – множество функций f, представленных в виде свертки ядра Вейля

$D_r(t)$ и функции h с $\mathrm{Var}(h) \le v$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_r(x-t)h(t)dt, \ D_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right).$$

В.Н. Русак [37] установил следующее точное неравенство на множестве функций $f \in W_{2\pi}^r V$:

$$R_n(f) \le \frac{c(r)v}{n^{r+1}}, \quad n \ge [r]+1. \tag{6}$$

Это неравенство является периодическим аналогом результатов В.А. Попова (3) и А.П. Старовойтова [25]. Оценка (6) получена с помощью операторов типа Валле-Пуссена.

В.Н. Русак [38] установил аналогичные оценки для наилучших рациональных приближений и в пространствах Лебега L_p. Кроме того, В.Н. Русак и его ученики (см., например, [39]) получили ряд других результатов о приближении различных классов функций с помощью рациональных рядов Фурье и соответствующих операторов типа Фейера, Джексона и Валле-Пуссена.

Для интерполированных рациональных функций получены во многом аналогичные результаты, в частности, Е.А. Ровбой [40; 41] введены интерполяционные операторы типа Фейера, Джексона и Валле-Пуссена, а также исследованы их аппроксимационные свойства как в случае фиксированных, так и в случае свободных полюсов.

3. Метод пространств Харди в рациональной аппроксимации. В теории полиномиальной аппроксимации хорошо известны прямая и обратная теоремы, полученные соответственно Д. Джексоном и С.Н. Бернштейном. При попытках получить аналогичные теоремы для наилучших рациональных приближений возникли существенные трудности. Было не ясно, какие функциональные пространства следует использовать для этих целей. Оказалось, что пространство Харди является наиболее известным и простым для решения поставленной задачи.

Вначале мы приведем необходимые сведения из теории пространств Харди (см., например, [11; 42]). Обозначим через $A(D)$ пространство функций, аналитических в круге $D = \{z : |z| < 1\}$; H_∞ – подпространство $A(D)$, состоящее из ограниченных функций. Пространство H_∞ является банаховым относительно нормы $\|f\|_{H_\infty} = \sup_{z\in D}|f(z)|$. Через C_A обозначим подпространство H_∞, состоящее из функций f, допускающих непрерывное продолжение в замкнутый круг $\bar{D} = D \cup \partial D$. Для $f \in C_A$ имеем $\|f\|_{C_A} = \|f\|_{H_\infty} = \max_{z\in \bar{D}}|f(z)| = \max_{z\in\partial D}|f(z)|$.

Через H_p, $0 < p < \infty$, обозначим пространство Харди: функция $f \in H_p$, если $f \in A(D)$ и

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0\le\rho<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\varphi})|^p d\varphi\right)^{1/p} < \infty.$$

Как известно, если $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, то почти для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ существует и конечен $\lim f(z) =: f(e^{i\varphi})$, когда $z \in D$ и стремится к $e^{i\varphi}$ по некасательным по отношению к ∂D путям. При этом имеет место равенство (с естественной модификацией при $p = \infty$)

$$\|f\|_{H_p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\varphi})|^p d\varphi\right)^{1/p}.$$

Пространство H_p при $1 < p < \infty$ является банаховым, а при $0 < p < 1$ это пространство квазибанахово, в этом случае роль неравенства треугольника выполняет неравенство $\|f+g\|_{H_p}^p \le \|f\|_{H_p}^p + \|g\|_{H_p}^p$, где f и g принадлежат H_p.

Пусть $f \in A(D)$ и

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

– ее разложение в ряд Маклорена. Введем $\Im^\alpha f$ – производную функции f порядка $\alpha > 0$ в смысле Вейля, т.е.

$$\Im^\alpha f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha a_k z^k.$$

Очевидно, $\Im^\alpha f(z) = \left(z\dfrac{d}{dz} \right)^\alpha f(z)$ при $\alpha \in \mathbb{N}$.

Для $\alpha > 0$ и $0 < \sigma < \infty$ через H^α_σ обозначим пространство Харди–Соболева, т.е. $f \in H^\alpha_\sigma$, если $f \in A(D)$ и

$$\|f\|_{H^\alpha_\sigma} := \|\Im^\alpha f\|_{H_\sigma} < \infty.$$

Согласно теореме Ф. Рисса, имеет место непрерывное некомпактное вложение $H^1_1 \subset C_A$. При этом если $f \in H^1_1$, то функция f абсолютно непрерывна на ∂D. Теорема Харди–Литтлвуда утверждает справедливость непрерывного некомпактного вложения $H^\alpha_\sigma \subset H_p$ при $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$ и $1/\sigma = \alpha + 1/p$. Из теорем Ф. Рисса и Харди–Литтлвуда следует, что $H^\alpha_{1/\alpha} \subset C_A$ при $\alpha > 1$. Таким образом, если $f \in H^\alpha_{1/\alpha}$ и $\alpha > 1$, то $R_n(f, D)$ определяется корректно. Отметим также, что пространство $H^\alpha_{1/\alpha}$ при $0 < \alpha < 1$ содержит неограниченные функции.

Впервые пространство Харди в рациональной аппроксимации возникло у Е.П. Долженко, которым получена следующая обратная теорема рациональной аппроксимации [43]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n(f, \bar{D}) < \infty \Rightarrow f \in H^1_1. \tag{7}$$

А.А. Пекарским доказана соответствующая прямая теорема рациональной аппроксимации [44]:

$$f \in H^1_1 \Rightarrow \begin{cases} R_n(f, \bar{D}) \le \dfrac{c}{n}\|f\|_{H^1_1}, \ n \ge 1; \\ R_n(f, \bar{D}) = o\left(\dfrac{1}{n}\right), \ n \to \infty. \end{cases} \tag{8}$$

Импликации (7) и (8) были обобщены А.А. Пекарским на случай производных любого порядка [44–46].

Пусть $\alpha > 0, \gamma = \min\{2, 1/\alpha\}$ *и* $f \in C_A$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(n^\alpha R_n(f, \bar{D})\right)^\gamma < \infty \Rightarrow f \in H^\alpha_{1/\alpha}. \tag{9}$$

Если $\alpha > 1$, *то*

$$f \in H^\alpha_{1/\alpha} \Rightarrow \begin{cases} R_n(f, \bar{D}) \le \dfrac{c(\alpha)}{n^\alpha}\|f\|_{H^\alpha_{1/\alpha}}, \ n \ge 1; \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(n^\alpha R_n(f, \bar{D})\right)^2 < \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Отметим, что из (8) и (10) можно получить оценки (3)–(6) как в периодическом, так и непериодическом случаях, а также некоторые их обобщения. Это показано в оригинальной работе [44], обзоре [47] и монографии [11].

4. Наилучшая рациональная аппроксимация функций Маркова и их аппроксимация посредством рациональных операторов Фурье. Пусть μ – комплексный борелевский заряд с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{C}$. Тогда функция

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(t)}{t - z}, \ z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\mu,$$

называется преобразованием Коши заряда μ. Если же μ – борелевская мера с компактным носителем $\operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$, то функцию $\hat{\mu}$ называют функцией Маркова.

Аппроксимации функций Маркова посредством рациональных функций со свободными полюсами посвящен ряд работ. Первой из них была статья А.А. Гончара [48], затем последовали работы Т. Ганелиуса [49], Г. Шталя [50] и Д. Браесса [51]. В этих работах рассматривался случай, когда наименьший отрезок, содержащий $\operatorname{supp}\mu$, не пересекается с компактом K, на котором осуществляется приближение. Наиболее полные результаты получены, когда K суть отрезок $I = [-1, 1]$ или замкнутый круг $\bar{D}$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. В следующем результате рассматривается случай, когда $\operatorname{supp}\mu$ и K имеют одну общую точку.

Пусть $\operatorname{supp}\mu = [1, a]$, $a > 1$, *мера* μ *абсолютно непрерывна на* $[1, a]$ *относительно меры Лебега и* $\mu'(t) \asymp (t-1)^{\alpha}$ *при* $t \in [1, a]$ *и некотором* $\alpha > 0$. *Тогда для* $n \in \mathbb{N}$ *имеют место порядковые соотношения:*

$$\begin{cases} R_n(\hat{\mu}, I) \asymp \exp\left(-2\pi\sqrt{\alpha n}\right), \\ R_n(\hat{\mu}, D) \asymp \exp\left(-\pi\sqrt{2\alpha n}\right). \end{cases} \tag{11}$$

Нижние оценки в этих соотношениях получены Я.-Э. Андерссоном [52], а верхние – А.А. Пекарским [53]. Доказательство нижних оценок основано на принципе двойственности для наилучших приближений. При доказательстве верхних оценок использованы метод А.А. Гончара [48] многоточечных аппроксимаций Паде и первое соотношение из (8).

Далее рассмотрим аппроксимацию функции Маркова $\hat{\mu}$ с помощью рациональных операторов Фурье.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n}$, $n \in \mathbb{N}$, – набор чисел из D, причем $\alpha_0 = 0$. Определим систему рациональных функций Такенака–Мальмквиста, которую мы уже упомянули в п. 2:

$$\Phi_0(z) = 1, \ \ \Phi_k(z) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_k|^2}}{1-\bar{\alpha}_k z}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{z-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j z}, \ k \geq 1.$$

Система $\{\Phi_k\}_{k=0}^{n}$ ортогональна на окружности ∂D в следующем смысле: при $k, m = 0, 1, \ldots, n$ справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Phi_k(z)\overline{\Phi}_m(z)|dz| = \begin{cases} 1, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Для $f \in C_A$ введем рациональный оператор Фурье

$$T_n(f, z) = \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\Phi_k(z), \quad \lambda_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} f(z)\overline{\Phi}_k(z)|dz|.$$

В частном случае, когда все $\alpha_k = 0$, $T_n(f, z)$ суть n-й многочлен Тейлора функции f.

Для $f \in C_A$ введем следующую характеристику:

$$\varepsilon_n(f, D) = \inf\|f(\cdot) - T_n(f, \cdot)\|_{C_A},$$

где нижняя грань берется по всем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in D$. Очевидно, $R_n(f, D) < \varepsilon_n(f, D)$.

Величину, аналогичную $\varepsilon_n(f, D)$, введем также и для $g \in C(I)$. С этой целью определим $\{M_k\}_{k=0}^{n}$ – систему рациональных функций Джрбашяна–Китбаляна [54]. Пусть $x \in I$ и $\theta = \arccos x$. Тогда

$$M_0(x) = 1, \ M_k(x) = \frac{1}{2}\left(\Phi_k(e^{i\theta}) + \Phi_k(e^{-i\theta})\right), \ k \geq 1.$$

Система $\{M_k\}_{k=0}^{n}$ ортогональна на I с весом $1/\sqrt{1-x^2}$, т.е. при $k, m = 0, 1, \ldots, n$ выполняются равенства

$$\frac{2}{\pi}\int_I M_k(x)\overline{M}_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 2, & k = m = 0; \\ 1, & k = m \geq 1; \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Для $g \in C(I)$ определим рациональный оператор Фурье

$$S_n(g, x) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\eta_k M_k(x), \quad \eta_k = \frac{2}{\pi}\int_I g(x)\overline{M}_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В частном случае, когда все $\alpha_k = 0$, $S_n(g, x)$ суть n-я частная сумма ряда Фурье функции g по многочленам Чебышёва первого рода.

Далее, для $g \in C(I)$ введем характеристику

$$\varepsilon_n(g,\ I) = \inf\|g(\ ) - S_n(g,\ \cdot)\|_{C(I)},$$

где нижняя грань берется по всем $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n \in D$. Очевидно, $R_n(g,\ I) \le \varepsilon_n(g,\ I)$.

Рассмотрим функцию Маркова $\hat{\mu}$, порожденную мерой μ, удовлетворяющей условиям $\operatorname{supp}\mu \subset [1,\ +\infty)$ и $\int(t-1)^{-1}d\mu(t) < +\infty$. В этом случае $\hat{\mu} \in C_*$ и, в частности, $\hat{\mu} \in C(I)$. Для оценок $\varepsilon_n(\hat{\mu},\ \overline{D})$ и $\varepsilon_n(\hat{\mu},\ I)$ нам понадобится следующая характеристика меры μ:

$$b_n(\mu) = \inf \int \frac{d\mu(t)}{t(t-1)\,|\,B_n(t)\,|^2},$$

где нижняя грань берется по всем $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n \in D$, а $B_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{t-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k t}$ – произведение Бляшке для круга D. Введем также меру ν, которая связана с мерой μ следующим образом:

$$d\nu(t) = \frac{4t^2}{t^2-1}\,d\mu[\phi(t)],\quad \phi(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

Сформулируем сейчас результаты из [55] о приближении функций Маркова посредством рациональных операторов Фурье.

Если $l = \inf(\operatorname{supp}\mu) > 1$, то для $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\begin{cases} c_1(l)b_n(\mu) \le R_n(\hat{\mu},\ \overline{D}) \le \varepsilon_n(\hat{\mu},\ \overline{D}) \le 3b_n(\mu), \\ c_2(l)b_n(\nu) \le R_n(\hat{\mu},\ I) \le \varepsilon_n(\hat{\mu},\ I) \le 3b_n(\nu). \end{cases}$$

Таким образом, в случае когда $1 \notin \operatorname{supp}\mu$, скорость аппроксимации функции Маркова $\hat{\mu}$ посредством рациональных операторов Фурье совпадает со скоростью стремления к нулю наилучших рациональных приближений.

Если мера μ удовлетворяет тем же условиям, что и в соотношениях (11), то выполняются следующие неравенства:

$$\begin{cases} c_1\exp\left(-\pi\sqrt{2\alpha n}\right) \le R_n(\hat{\mu},\ \overline{D}) \le \varepsilon_n(\hat{\mu},\ \overline{D}) < c_2\sqrt{n}\exp\left(-\pi\sqrt{2\alpha n}\right), \\ c_3\exp\left(-2\pi\sqrt{\alpha n}\right) \le R_n(\hat{\mu},\ I) \le \varepsilon_n(\hat{\mu},\ I) < c_4\sqrt{n}\exp\left(-2\pi\sqrt{\alpha n}\right), \end{cases}$$

где положительные величины $c_1 - c_4$ зависят лишь от меры μ.

Итак, в последнем случае порядок приближения функции Маркова посредством операторов Фурье может отличаться от наилучших рациональных приближений разве лишь множителем $\sqrt{n}$. Было бы интересным найти точный порядок $\varepsilon_n(\hat{\mu},\ \overline{D})$ и $\varepsilon_n(\hat{\mu},\ I)$ в этом случае.

5. Рациональная аппроксимация с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Пусть $\rho_{n,q}(f,\ [a,\ b])$ означает наилучшее равномерное приближение функции $f \in C[a,\ b]$ рациональными функциями степени не выше n, имеющими не более чем q геометрически различных полюсов в открытой комплексной плоскости. Справедлив следующий результат К.Н. Лунгу [56] (ср. с результатом А.А. Гончара (2)).

Если $f \in C[0,\ 1]$ и допускает ограниченное аналитическое продолжение в круг $\{z : |\,z-1\,| < 1\}$, то

$$\rho_{n,q}(f,\ [0,\ 1]) \le c(q,\ f)\omega_f\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{4q+2}\right),\quad n > 2, \tag{12}$$

где ω_f – модуль непрерывности f на $[0,1]$ и $q \in \mathbb{N}$ фиксировано.

Приведем подобные результаты для других классов функций, отражающих особенности рациональной аппроксимации. Пусть мера μ определена на отрезке $[1,\ a]$, $1 < a < \infty$, и удовлетворяет условию $\int(t-1)^{-1}d\mu(t) < \infty$. Тогда $\hat{\mu} \in C(I)$, и мы можем ввести

$$\varepsilon_{n\,q}(\hat{\mu},\ I) = \inf\|\,\hat{\mu}(\ ) - S_n(\hat{\mu},\ \cdot)\,\|_{C(I)},$$

где $S_n(\hat{\mu},\ \cdot)$ определено в п. 4, а нижняя грань берется по всем числам $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$ из D, среди которых не более чем q различных. Следующий результат получили Е.А. Ровба и Е.Г. Микулич [57].

Пусть мера μ абсолютно непрерывна на $[1, a]$ относительно меры Лебега и существует $\alpha > 0$, такое, что $\mu'(t) \sim (t-1)^{\alpha}$ при $t \to 1$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n}\right)^{2\alpha} \varepsilon_{n,q}(\hat{\mu}, I) = \Gamma(2\alpha)\left(2q^{2q+1}\alpha^{2q-1}[(q-1)!]^2\right)^{2\alpha}.$$

Из последнего равенства можно получить следующие соотношения:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n}\right)^{2\alpha} \varepsilon_{n,q}(x^{\alpha}, [0, 1]) = \Gamma(2\alpha)\left(2q^{2q+1}\alpha^{2q-1}[(q-1)!]^2\right)^{2\alpha} \frac{|\sin \pi\alpha|}{\pi}, \ \alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N};$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n} \varepsilon_{n,2q}(|x|, I) = \left(\frac{q}{2}\right)^{2q-1} [(q-1)!]^2;$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{2q}}{\ln^{2q-1} n} \varepsilon_{n,q}(|\sin x|, \mathbb{R}) = \frac{q^{2q+1}}{\pi 2^{2q-2}}[(q-1)!]^2.$$

Относительно этих результатов сделаем следующие замечания: 1) в отличие от результата К.Н. Лунгу (12), в этом случае полюсы считаются в расширенной комплексной плоскости; 2) в оценке приближения функции $|\sin x|$ речь идет об аппроксимации тригонометрическими рациональными функциями, имеющими не более чем $2q$ геометрически различных полюсов.

6. Рациональная аппроксимация преобразования Коши комплексного заряда и ее приложение к конформным отображениям. Напомним, преобразование Коши определено в п. 4. В работе [58] получен следующий результат.

Пусть заряд μ абсолютно непрерывен относительно меры Лебега на $[1, a]$ и существуют постоянные $h > 0$ и $\alpha > 0$, такие, что $|\mu'(t)| \le h(t-1)^{\alpha}$, $t \in [1, a]$. Тогда (ср. со вторым неравенством из (11))

$$R_n(\hat{\mu}, D) < c(a, \alpha) h \exp\left(-\pi\sqrt{\alpha n}\right), \ n \ge 1. \tag{13}$$

Отметим, что к настоящему моменту остается открытым вопрос о точности этой оценки.

Приведем приложение неравенства (13) к рациональной аппроксимации конформных отображений.

Пусть G – односвязная ограниченная область с жордановой границей ∂G. Согласно теореме Каратеодори, функция $z = \varphi(w)$, осуществляющая конформное отображение круга D на область G, продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей $\bar{D}$ и $\bar{G}$, в частности, $\varphi \in C_A$. Гладкость ∂G и функции $\varphi|_{\partial D}$ тесно связаны между собой (см., например, [59]). Поэтому для равномерных приближений функции $z = \varphi(w)$ часто используют результаты полиномиальной теории приближений функций. Сформулированный ниже результат [58] показывает, что рациональные приближения гораздо эффективнее и в этом случае.

Пусть ∂G состоит из s, $s \in \mathbb{N}$, аналитических дуг. Обозначим через $\pi\alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, s$, внутренние углы между указанными дугами. Считаем, что $0 < \alpha_j < 2$. Определим θ из условия

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_s}.$$

При указанных условиях на ∂G имеет место неравенство

$$R_n(\varphi, \bar{D}) < c(G) e^{-\pi\sqrt{\theta n}}, \quad n > 1.$$

7. Некоторые нерешенные задачи. Напомним, что мы уже сформулировали две задачи в п. 4 и п. 6.

Следует заметить, что на данный момент не решена ни одна задача о нахождении точных постоянных в неравенствах типа Джексона для наилучших рациональных приближений. В этом направлении отметим задачу нахождения точных постоянных в неравенствах (2)–(6), а также значения постоянных в неравенствах из (8) и (10). Для решения этих задач, очевидно, нужно разрабатывать новые методы аппроксимации.

Импликация (9) доказывается с помощью соответствующего неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций. Было бы интересным найти точные значения постоянных в указанных неравенствах. Эти постоянные известны (см. [9; 36; 43]) лишь для $\alpha = 1$. Некоторое продвижение для высших производных достигнуто Т.С. Мардвилко [60].

Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации, аналогичные (9) и (10), получены также для пространств Харди H_p и Лебега L_p с $1/p \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$. Требуется найти соответствующие одна другой прямую и обратную теоремы рациональной аппроксимации в пространствах H_p и L_p при $1/p \in \mathbb{N}$.

Используя импликации (9) и (10), можно описать множество функций $f \in C_A$, для которых последовательность $\{R_n(f, \bar{D})\}$ имеет степенной порядок убывания. Аналогичный результат можно получить и для пространства $C[-1, 1]$. Однако неизвестно, как описать множество функций из C_A и $C[-1, 1]$, имеющих геометрический порядок убывания наилучших рациональных приближений. Напомним, что для полиномиальных приближений на этот вопрос отвечает теорема С.Н. Бернштейна.

В п. 1 отмечено, что последовательность $\{R_n(f)\}$, $f \in C[-1, 1]$, не возрастая, стремится к нулю. Представляет интерес следующая обратная задача рациональной аппроксимации: можно ли утверждать, что для любой невозрастающей бесконечно малой последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ существует функция $f_0 \in C[-1, 1]$, такая, что $R_n(f_0) = a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$? С использованием принципа неподвижной точки в [61] дано положительное решение обратной задачи рациональной аппроксимации в пространстве $C[-1, 1]$ при дополнительном предположении строгой монотонности последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Аналогичные результаты получены в [62] и [63] соответственно для пространства C_A и $C_{2\pi}$ – пространства непрерывных 2π-периодических функций. Отметим, что для полиномиальных приближений обратная задача полностью решена С.Н. Бернштейном.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чебышёв, П.Л.* Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций / П.Л. Чебышёв // Собр. соч. : в 2 т. – М. : Изд-во Акад. наук СССР. 1947. – Т. 2 – С. 151–235.

2. *Золотарёв, Е.И.* Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее уклоняющихся от нуля / Е.И. Золотарёв // Записки С.-Петерб. АН. – 1912. – Т. 30, № 5. – С. 1–59.

3. *Марков, А.А.* Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля / А.А. Марков // Избр. труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. – М.–Л. : ГИТТЛ. 1948. – С. 244–291.

4. *Гончар, А.А.* О наилучших приближениях рациональными функциями / А.А. Гончар // ДАН СССР. – 1955. – Т. 100, № 2. – С. 13–16.

5. *Гончар, А.А.* Обратные теоремы о наилучших приближениях на замкнутых множествах / А.А. Гончар // ДАН СССР. – 1959. – Т. 128, № 1. – С. 25–28.

6. *Гончар, А.А.* Обратные теоремы о наилучших приближениях рациональными функциями / А.А. Гончар // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1961 – Т. 25, № 3. – С. 347–356.

7. *Гончар, А.А.* Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций / А.А. Гончар // Труды Междунар. конгресса математиков. – М. : Наука, 1966. – С. 347–356.

8. *Долженко, Е.П.* Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций / Е.П. Долженко // Матем. сб. – 1962. – Т. 56, № 4. – С. 403–432.

9. *Долженко, Е.П.* О свойствах функций нескольких переменных, достаточно хорошо приближаемых рациональными дробями / Е.П. Долженко // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1962. – Т. 26, № 5. – С. 641–652.

10. *Newman, D.J.* Rational approximation to |x| / D.J. Newman // Mich. Math. Journ. – 1964. – Vol. 11, № 1. – P. 11–14.

11. *Lorentz, G.G.* Constructive Approximation. Advanced Problems / G.G. Lorentz, M.V. Golitschek, Y. Makovoz. – Berlin : Springer-Verlag. 1996. – 651 p.

12. *Бернштейн, С.Н.* О наилучшем приближении |x| посредством многочленов данной степени // Собр. соч. : в 2 т. – М. : Изд-во Акад. наук СССР, 1952. – Т. 1 – С. 157–206.

13. *Szüsz, P.* On the constructive theory of functions / P. Szüsz, P. Turan // Maguar tud. Acad. Math. Kutato into Közl. – 1964–1965. – Vol. 9, № 3. – P. 495–501.

14. *Szüsz, P.* On the constructive theory of functions, II / P. Szüsz, P. Turan // Stud. Sci. Math. Hung. – 1966. – Vol. 1, № 3–4. – P. 65–69.

15. *Szüsz, P.* On the constructive theory of functions, III / P. Szüsz, P. Turan // Stud. Sci. Math. Hung. – 1966. – Vol. 1, № 3–4. – P. 315–322.

16. *Гончар, А.А.* Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения / А.А. Гончар // Матем. сб. – 1967. – Т. 72, № 3. – С. 489–503.

17. *Гончар, А.А.* О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями / А.А. Гончар // Матем. сб. – 1967. – Т. 73, № 4. – С. 630–639.

18. *Абдугаппаров, А.А.* Приближение функций с выпуклой производной посредством рациональных функций : автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук : 01.01.01 / А.А. Абдугаппаров ; Калинин. гос. ун-т. – Калинин, 1974. – 10 с.

19. *Freud, G.* Uber die Approximation reeller funktionen durch rationale gebrochene funktionen / G. Freud // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. – 1966. – Vol. 17, № 3–4. – P. 313–324.

20. *Freud, G.* On rational approximation of differentiable functions / G. Freud // Studia Sci. Math. Hung. – 1970. – Vol. 5. – P. 437–439.

21. *Буланов, А.П.* О порядке приближения выпуклых функций рациональными функциями / А.П. Буланов // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 1132–1148.

22. *Буланов, А.П.* Рациональные приближения выпуклых функций с заданным модулем непрерывности / А.П. Буланов // Матем. сб. – 1971. – Т. 84, № 3. – С. 476–494.

23. *Буланов, А.П.* Рациональные приближения непрерывных функций с конечным изменением / А.П. Буланов // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1975. – Т. 39, № 5. – С. 1142–1181.

24. *Popov, V.A.* Uniform rational approximation of the class V^r and its applications / V.A. Popov // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. – 1977. – Vol. 29, № 1–2. – P. 119–129.

25. *Старовойтов, А.П.* Рациональная аппроксимация функций, представимых в виде интеграла дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля / А.П. Старовойтов // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 12. – С. 1079–1081.

26. *Пекарский, А.А.* Рациональная аппроксимация непрерывных функций с заданным модулем непрерывности и модулем изменения / А.А. Пекарский // Изв. АН БССР. Серия физ.-матем. наук. – 1978. – № 5. – С. 34–39.

27. *Петрушев, П.П.* Равномерная рациональная аппроксимация функций ограниченной вариации / П.П. Петрушев // Pliska Studia Math. Bulgarica. – 1979. – Vol. 1. – P. 144–155.

28. *Пекарский, А.А.* Рациональные приближения выпуклых функций / А.А. Пекарский // Матем. заметки. – 1985. – Т. 38, № 5. – С. 679–690.

29. *Буланов, А.П.* Приближение выпуклых функций с заданным модулем непрерывности рациональными функциями / А.П. Буланов // Матем. сб. – 1978. – Т. 105, № 1. – С. 3–27.

30. *Петрушев, П.П.* О рациональной аппроксимации функций / П.П. Петрушев // Докл. Болг. АН. – 1976. – Т. 29. № 10. – С. 1405–1408.

31. *Попов, В.А.* Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями / В.А. Попов, П.П. Петрушев // Матем. сб. – 1977. – Т. 103, № 2. – С. 285–292.

32. *Хатамов, А.А.* О рациональной аппроксимации выпуклых функций класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$ / А.А. Хатамов // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18, № 6. – С. 845–854.

33. *Takenaka, S.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolation / S. Takenaka // Japan. J. of Math. – 1925. – Vol. 2. – P. 129–145.

34. *Malmquist, F.* Sur la determination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donne de points / F. Malmquist // Comptes rendus du sixieme congrèss des math. scand. – Kopenhagen. 1926. – P. 253–259.

35. *Джрбашян, М.М.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М.М. Джрбашян // Изв. АН АрмССР. Серия физ.-матем. наук. – 1956. – Т. 9, № 7. – С. 3–28.

36. *Русак, В.Н.* Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. – Минск : Изд-во БГУ, 1979. – 176 с.

37. *Русак, В.Н.* Точные порядковые оценки для наилучших рациональных приближений на классах функций, представимых в виде свертки / В.Н. Русак // Матем. сб. – 1985. – Т. 128, № 4. – С. 492–515.

38. *Русак, В.Н.* Точные порядки наилучших рациональных приближений свертки ядра Вейля и функций из L_p / В.Н. Русак // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 315, № 2. – С. 313–316.

39. *Русак, В.Н.* Наилучшие рациональные приближения и оценки уклонений специальных рациональных функций / В.Н. Русак // Выбр. навук. пр. БДУ. – Мінск : Выд-ва БДУ. – 2001. – С. 445–463.

40. *Ровба, Е.А.* Интерполяционные рациональные операторы типа Фейера и Валле-Пуссена / Е.А. Ровба // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, № 2. – С. 114–121.

41. *Ровба, Е.А.* Сумматорные рациональные операторы типа Джексона / Е.А. Ровба // Матем. заметки. – 1997. – Т. 61, № 6. – С. 18–22.

42. *Кусис, П.* Введение в теорию пространств H^p / П. Кусис. – М. : Мир, 1984. – 364 с.

43. *Долженко, Е.П.* Рациональные аппроксимации и граничные свойства аналитических функций / Е.П. Долженко // Матем. сб. – 1966. – Т. 69 (111), № 4. – С. 313–320.

44. *Пекарский, А.А.* Чебышёвские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке / А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1987. – Т. 133, № 1. – С. 86–102.

45. *Пекарский, А.А.* Оценки высших производных рациональных функций и их приложения / А.А. Пекарский // Изв. АН БССР. Серия физ.-матем. наук – 1980. – № 5. – С. 21–29.

46. *Пекарский, А.А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации / А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1984. – Т. 124 (162), № 4 (8). – С. 571–588.

47. *Pekarskii, A.A.* Approximation by rational function with free pole / A.A. Pekarskii // East Journal on Approximations. – 2007. – Vol. 13, № 4. – P. 227–319.

48. *Гончар, А.А.* О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций / А.А. Гончар // Матем. сб. – 1978. – Т. 105, № 2. – С. 147–163.

49. *Ganelius, T.* Orthogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function / T. Ganelius // Studies in Pure Mathematics (To the memory of Paul Turan) : ed. P. Erdős. – Basel : Birkhäuser Verlag, 1978. – P. 237–243.

50. *Stahl, H.* Best Rational Approximants to Markov Functions / H. Stahl // Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai, Kecskemet (Hungary). – 1990. – Vol. 58. – P. 627–643.

51. *Braess, D.* Rational Approximation of Stieltjes Functions by the Caratheodory–Fejer Method / D. Braess // Constr. App. – 1987. – Vol. 3. – P. 43–50.

52. *Andersson, J.-E.* Rational approximation to function like x^{α} in integral norms / J.-E. Andersson // Analysis Math. – 1988. – Vol. 14, № 1. – P. 11–25.

53. *Пекарский, А.А.* Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова / А.А. Пекарский // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, № 2. – С. 121–132.

54. *Джрбашян, М.М.* Об одном обобщении полиномов Чебышёва / М.М. Джрбашян, А.А. Китбалян // Докл. АН АрмССР. – 1964. – Т. 38, № 5. – С. 263–270.

55. *Пекарский, А.А.* Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекций на множество рациональных функций / А.А. Пекарский, Е.А. Ровба // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65, № 3. – С. 362–368.

56. *Лунгу, К.Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К.Н. Лунгу // Матем. сб. – 1971. – Т. 86, № 2. – С. 314–324.

57. *Rovba, E.* Constants in rational approximation of Markov–Stieltjes functions with fixed number of poles / E. Rovba, E. Mikulich // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control. – 2013. – № 1. – P. 12–20.

58. *Пекарский, А.А.* Равномерные рациональные приближения преобразования Коши и их приложения к конформным отображениям / А.А. Пекарский // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 6. – С. 12–16.

59. *Голузин, Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г.М. Голузин. – М. : Наука, 1966. – 627 с.

60. *Mardvilko, T.S.* On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions / T.S. Mardvilko // East Journal on Approximations. – 2009. – Vol. 15, № 2. – P. 31–42.

61. *Пекарский, А.А.* Существование функции с заданными наилучшими равномерными рациональными приближениями / А.А. Пекарский // Изв. АН Беларуси. Серия физ.-матем. наук – 1994. – № 1. – С. 23–26.

62. *Назаренко, М.А.* Существование функции с заданными рациональными приближениями в пространстве $C(A)$ / М.А. Назаренко // Вести. МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1997. – № 4. – С. 20–22.

63. *Старовойтов, А.П.* К проблеме описания последовательностей наилучших тригонометрических рациональных приближений / А.П. Старовойтов // Матем. сб. – 2000. – Т. 191, № 6. – С. 145–154.

Поступила в редакцию 01.11.12.

"Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne" ISSN 2076-4847
"Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control"
Number 1 (148), 2013, pp. 30–43

Belarusian school of national approximation theory

A.A. Pekarskii [1], E.A. Rovba [2]

[1] *Belarusian State University (Belarus)*
Nezavisimosti Ave., 4, 220030, Minsk, Belarus; e-mail: pekarskii@gmail.com

[2] *Yanka Kupala State University of Grodno (Belarus)*
Ozheshko Str., 22, 230023. Grodno, Belarus; e-mail: rovba@grsu.by

Abstract. Problems of a theory of uniform rational approximation are as an object of this study. Results which were given in this field by Belarusian scientists are as a subject of this study. The theory of rational approximation of functions was based by the great Russian mathematician P. Chebyshev in the middle of the XIX century. Material which can be attributed to this area of science, is rather extensive. In this review authors have restricted themselves, firstly, to consideration of uniform approximations, secondly, to approximation of the functions on canonical sets – on an interval, on a straight line and in a disk, thirdly, to the main results received by the Belarusian school of rational approximation of functions, and also results of other authors connected with these. The results of foreign authors – A. Gonchar, E. Dolzhenko, D. Newman, V. Popov, P. Petrushev, J.-E. Andersson and some other, and also results of the Belarus authors – V. Rusak, A. Starovojtov, authors of present article and some of their students, are shown and discussed. Problems of approximation of functions by means of rational functions with optimal choice of numerator and denominator are considered. Such method of approximation is called the approximation with free poles. A number of results about classes of functions approximation for which rational approximation with free poles essentially better than polynomial approximation are stated. In particular, functions with typical features, functions of the bounded variation, convex functions and functions with the fractional derivative belonging to the given set of functions, function of Markov and Cauchy transformation of complex Borel charge is considered. Problems of approximation of functions by means of rational functions with restriction on quantity of poles or on their arrangement are also considered. Problems of approximation of functions by means of special methods are shown. Namely, with interpolations processes and Fourier operators of orthogonal systems of rational functions of Takenaka–Malmquist and Dzhrbashyan–Kitbalyan are under consideration. In this article some unresolved problems are formulated. The results of the study can be used in further investigations in a field of theory of rational approximation and also to solve some problems of numerical analysis

Keywords: rational functions, best approximation, Jackson type theorem, Bernstein type theorem, Cauchy transformation, Markov function, Hardy space, Takenaka–Malmkquist orthogonal system, Dzhrbashyan–Kitbalyan orthogonal system.

References

1. Chebyshev P.L. Questions about the least quantities associated with an approximate functions representation [*Voprosy o naimen shikh velichinakh, sviazannykh s priblizennym predstavleniem funktsii*]. *Sobr. soch.: v 2 t.*, Moscow, 1947, vol. 2, pp. 151-235.

2. Zolotarev E.I. Elliptic functions application to questions about functions of the least and most deviating from zero [*Prilozhenie ellipticheskikh funktsii k voprosam o funktsiiakh, naimenee i naibolee ukloniaiushchikhsia ot nulia*]. *Zapiski S.-Peterb. AN*, 1912, vol. 30, no. 5, pp. 1-59.

3. Markov A.A. Lectures about functions least deviating from zero [*Lektsii o funktsiiakh, naimenee ukloniaiushchikhsia ot nulia*]. *Izbr. trudy po teorii neprer. drobei i teorii funktsii, naimenee uklon. ot nulia*, Moscow–Leningrad, 1948, pp. 244-291.

4. Gonchar A.A. About rational functions best approximations [*O nailuchshikh priblizheniiakh ratsional'nymi funktsiiami*]. *DAN SSSR*, 1955, vol. 100, no. 2, pp. 13-16.

5. Gonchar A.A. Inverse best approximations theorems on closed sets [*Obratnye teoremy o nailuchshikh priblizheniiakh na zamknutykh mnozhestvakh*]. *DAN SSSR*, 1959, vol. 128, no. 1, pp. 25-28.

6. Gonchar A.A. Inverse best approximations theorems by rational functions [*Obratnye teoremy o nailuchshikh priblizheniiakh ratsional'nymi funktsiiami*]. *Izv. AN SSSR*, 1961, vol. 25, no. 3, pp. 347-356.

7. Gonchar A.A. Approximation speed by rational fractions and functions properties [*Skorost' priblizheniia ratsional'nymi drobiami i svoistva funktsii*]. *Trudy Mezhdunar. kongressa matematikov*, Moscow, 1966, pp. 347-356.

8. Dolzhenko E.P. Approximation speed by rational fractions and functions properties [*Skorost' priblizheniia ratsional'nymi drobiami i svoisrva funktsii*]. *Matem. sb.*, 1962, vol. 56, no. 4, pp. 403-432.

9. Dolzhenko E.P. Functions properties of several variables, which are well approximated by rational fractions [*O svoistvakh funktsii neskol'kikh peremennykh, dostatochno khorosho priblizhaemykh ratsional'nymi drobiami*]. *Izv. AN SSSR*, 1962, vol. 26, no. 5, pp. 641-652.

10. Newman D.J. Rational approximation to $|x|$. *Mich. Math. Journ.*, 1964, vol. 11, no. 1, pp. 11-14.

11. Lorentz G.G., Golitschek M.V., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin, 1996. 651 p.

12. Bernshtein S.N. About best approximation of $|x|$ by polynomials of a given degree [*O nailuchshem priblizhenii $|x|$ posredstvom mnogochlenov dannoi stepeni*]. *Sobr. soch.: v 2 t.*, Moscow, 1952, vol. 1, pp. 157-206.

13. Szüsz P., Turan P. On the constructive theory of functions. *Maguar tud. Acad. Math. Kutato into Közl.*, 1964-1965, vol. 9, no. 3, pp. 495-501.

14. Szüsz P., Turan P. On the constructive theory of functions, II. *Stud Sci. Math. Hung.*, 1966, vol. 1, no. 3-4, pp. 65-69.

15. Szüsz P., Turan P. On the constructive theory of functions. III. *Stud. Sci. Math. Hung.*, 1966, vol. 1, no. 3-4, pp. 315-322.

16. Gonchar A.A. Growth estimates of rational functions and some of their applications [*Otsenki rosta ratsional'nykh funktsii i nekotorye ikh prilozheniia*]. *Matem. sb.*, 1967, vol. 72, no. 3, pp. 489-503.

17. Gonchar A.A. About rational approximation speed of continuous functions with characteristic features [*O skorosti ratsional'noi approksimatsii nepreryvnykh funktsii s kharakternymi osobennostiami*]. *Matem. sb.*, 1967, vol. 73, no. 4, pp. 630-639.

18. Abdugapparov A.A. Approximation of functions with a convex derivative by rational functions [*Priblizhenie funktsii s vypukloi proizvodnoi posredstvom ratsional'nykh funktsii: avtoref. dis.*]. Kalinin, 1974, 10 p.

19. Freud G. Über die Approximation reeller funktionen durch rationale gebrochene funktionen. *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, 1966, vol. 17, no. 3-4, pp. 313-324.

20. Freud G. On rational approximation of differentiable functions. *Studia Sci. Math. Hung.*, 1970, vol. 5, pp. 437-439.

21. Bulanov A.P. About approximation order of convex functions by rational functions [*O poriadke priblizheniia vypuklykh funktsii ratsional'nymi funktsiiami*]. *Izv. AN SSSR*, 1969, vol. 33, no. 5, pp. 1132-1148.

22. Bulanov A.P. Rational approximation of convex functions with a given modulus of continuity [*Ratsional'nye priblizheniia vypuklykh funktsii s zadannym modulem nepreryvnosti*]. *Matem. sb.*, 1971, vol. 84, no. 3, pp. 476-494.

23. Bulanov A.P. Rational approximation of continuous functions with finite variation [*Ratsional'nye priblizheniia nepreryvnykh funktsii s konechnym izmeneniem*]. *Izv. AN SSSR*, 1975, vol. 39, no. 5, pp. 1142-1181.

24. Popov V.A. Uniform rational approximation of the class V^r and its applications. *Acta. Math. Acad. Sci. Hung.*, 1977, vol. 29. no. 1-2, pp. 119-129.

25. Starovoitov A.P. Rational approximation of functions represented by an integral of fractional order in the Riemann–Liouville meaning [*Ratsional'naia approksimatsiia funktsii predstavimykh v vide integrala drobnogo poriadka v smysle Rimana–Liuvillia*]. *Dokl. AN BSSR*, 1985, vol. 29, no. 12, pp. 1079-1081.

26. Pekarskii A.A. Rational approximation of continuous functions with a given modulus of continuity and variation module [*Ratsional'naia approksimatsiia nepreryvnykh funktsii s zadannym modulem nepreryvnosti i modulem izmeneniia*]. *Izv. AN BSSR*, 1978, no. 5, pp. 34-39.

27. Petrushev P.P. Uniform rational approximation of functions of bounded variation [*Ravnomernaia ratsional'naia approksimatsiia funktsii ogranichennoi variatsii*]. *Pliska Studia Math. Bulgarica*, 1979, vol. 1, pp. 144-155.

28. Pekarskii A.A. Rational approximation of convex functions [*Ratsional'nye priblizheniia vypuklykh funktsii*]. *Matem. zametki*, 1985, vol. 38, no. 5, pp. 679-690.

29. Bulanov A.P. Approximation of convex functions with a given rational functions continuity modulus [*Priblizhenie vypuklykh funktsii s zadannym modulem nepreryvnosti ratsional'nymi funktsiiami*]. *Matem. sb.*, 1978, vol. 105. no. 1, pp. 3-27.

30. Petrushev P.P. About rational approximation of functions [*O ratsional'noi approksimatsii funktsii*]. *Dokl. Bolg. AN*, 1976, vol. 29, no. 10, pp. 1405-1408.

31. Popov V.A., Petrushev P.P. The exact order of the best approximation of convex functions by rational functions [*Tochnyi poriadok nailuchshego ravnomernogo priblizheniia vypuklykh funktsii ratsional'nymi funktsiiami*]. *Matem. sb.*, 1977, vol. 103, no. 2, pp. 285-292.

32. Khatamov A.A. About rational approximation of convex functions of Lipα class [*O ratsional'noi approksimatsii vypuklykh funktsii klassa* Lipα]. *Matem. zametki*, 1975, vol. 18, no. 6, pp. 845-854

33. Takenaka S. On the orthogonal functions and a new formula of interpolation. *Japan. J. of Math.*, 1925, vol. 2, pp. 129-145.

34. Malmquist F. Sur la determination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donne de points. *Comptes rendus du sixieme congress des math. scand.*, Kopenhagen, 1926, pp. 253-259.

35. Dzhrbashian M.M. To Fourier series theory about rational functions [*K teorii riadov Fur'e po ratsional'nym funktsiiam*]. *Izv. AN ArmSSR*, 1956. vol. 9, no. 7, pp. 3-28

36. Rusak V.N. Rational functions as approximation apparatus [*Ratsional'nye funktsii kak apparat priblizheniia*]. Minsk. 1979, 176 p.

37. Rusak V.N. Sharp order estimates for best rational approximation on classes of functions, which are represented as a convolution [*Tochnye poriadkovye otsenki dlia nailuchshikh ratsional'nykh priblizhenii na klassakh funktsii. predstavimykh v vide svertki*]. *Matem. sb.*, 1985, vol. 128, no. 4, pp. 492-515.

38. Rusak V.N. Exact orders of best rational approximation of the Weyl convolution kernel and functions of L_p [*Tochnye poriadki nailuchshikh ratsional'nykh priblizhenii svertki iadra Veilia i funktsii iz L_p*]. *Dokl. AN SSSR*, 1990, vol. 315, no. 2, pp. 313-316.

39. Rusak V.N. Best rational approximation and estimates of the special rational functions deviations [*Nailuchshie ratsional'nye priblizheniia i otsenki uklonenii spetsial'nykh ratsional'nykh funktsii*]. *Vybr. navuk. pratsy BDU*. Minsk, 2001, pp. 445-463.

40. Rovba E.A. Interpolation rational operators as Fejer and de la Vallee-Poussin operators [*Interpoliatsionnye ratsional'nye operatory tipa Feiera i Valle-Pussena*]. *Matem. zametki*, 1993, vol. 53, no. 2, pp. 114-121.

41. Rovba E.A. Summation rational operators of Jackson type [*Summatornye ratsional'nye operatory tipa Dzheksona*]. *Matem. zametki,* 1997, vol. 61, no. 6, pp. 18-22.

42. Kusis P. Keeping in the theory of H^p spaces [*Vvedenie v teoriiu prostranstv* H^p]. Moscow, 1984, 364 p.

43. Dolzhenko E.P. Rational approximations and boundary properties of analytic functions [*Ratsional'nye approksimatsii i granichnye svoistva analiticheskikh funktsii*]. *Matem. sb.,* 1966, vol. 69 (111), no. 4, pp. 313-320.

44. Pekarskii A.A. Chebychev rational approximation in the disk, on the circle and on an interval [*Chebyshevskie ratsional'nye priblizheniia v kruge, na okruzhnosti i na otrezke*]. *Matem. sb.,* 1987, vol. 133, no. 1, pp. 86-102.

45. Pekarskii A.A. Estimates of higher derivatives of rational functions and their applications [*Otsenki vysshikh proizvodnykh ratsional'nykh funktsii i ikh prilozeniia*]. *Izv. AN BSSR,* 1980, no. 5, pp. 21-29.

46. Pekarskii A.A. Bernstein type inequalities for derivatives of rational functions, and inverse theorems of rational approximation [*Neravenstva tipa Bernshteina dlia proizvodnykh ratsional'nykh funktsii i obratnye teoremy ratsional'noi approksimatsii*]. *Matem. sb.,* 1984, vol. 124 (162), no. 4 (8), pp. 571-588.

47. Pekarskii A.A. Approximation by rational function with free pole. *East Journal on Approximations,* 2007, vol. 13, no. 4, pp. 227-319.

48. Gonchar A.A. About rational approximation rate of some analytic functions [*O skorosti ratsional'noi approksimatsii nekotorykh analiticheskich funktsii*]. *Matem. sb.,* 1978, vol. 105, no. 2, pp. 147-163.

49. Ganelius T. Orthogonal polynomials and rational approximation of holomorphic function. *Studies in Pure Mathematics (To the memory of Paul Turan);* ed. Erdos P., Basel, 1978, pp. 237-243.

50. Stahl H. Best Rational Approximants to Markov Functions. *Colloquia Math. Soc.* Janos Bolyai. Kecskemet (Hungary), 1990, vol. 58, p. 627-643.

51. Braess D. Rational Approximation of Stieltjes Functions by the Caratheodory–Fejer Method. *Constr. App.,* 1987, vol. 3, pp. 43-50.

52. Andersson J.-E. Rational approximation to function like x^{α} in integral norms. *Analysis Math.,* 1988, vol. 14, no. 1, pp. 11-25.

53. Pekarskii A.A.Best uniform rational approximation of Markov functions [*Nailuchshie ravnomernye ratsional'nye priblizheniia funktsii Markova*]. *Algebra i analiz,* 1995, vol. 7, no. 2, pp. 121-132.

54. Dzhrbashian M M, Kitbalian A.A. About one generalization of the Chebyshev polynomials [*Ob odnom obobshchenii polinomov Chebysheva*]. *Izv. AN ArmSSR,* 1964, vol. 38, no 5, pp. 263-270.

55. Pekarskii A.A., Rovba A.A. Uniform approximations of Stieltjes functions by orthoprojections to the set of rational functions [*Ravnomernye priblizheniia funktsii Stilt'esa posredstvom ortoproektsii na mnozhestvo ratsional'nykh funktsii*]. *Matem. zametki,* 1999, vol. 65, no. 3, pp. 362-368.

56. Lungu K.N. About rational functions best approximations with a fixed number of poles [*O nailuchshikh priblizheniiakh ratsional'nymi funktsiiami s fiksirovannym chislom poliusov*]. *Matem. sb.,* 1971, vol. 86, no. 2, pp. 314-324.

57. Rovba E., Mikulich E. Constants in rational approximation of Markov–Stieltjies functions with fixed number of poles. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne,* 2013, no. 1, pp. 12-20.

58. Pekarskii A.A. Uniform rational approximation of the Cauchy transform and its application to conformal mappings [*Ravnomernye ratsional'nye priblizheniia preobrazovaniia Koshi i ikh prilozheniia k konformnym otobrazheniiam*]. *Dokl. NAN Belarusi,* 2012, vol. 56, no. 6, pp. 12-16.

59. Goluzin G.M. Geometric theory of functions of a complex variable [*Geometricheskaia teoriia funktsii kompleksnogo peremennogo*]. Moscow, 1966, 627 p.

60. Mardvilko T.S. On the values of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions. *East Journal on Approximations,* 2009, vol. 15, no. 2, pp. 31-42.

61. Pekarskii A.A. Function existence with given the best uniform rational approximation [*Sushchestvovanie funktsii s zadannymi nailuchshimi ravnomernymi ratsional'nymi priblizheniiami*]. *Izv. AN Belarusi,* 1994, no. 1, pp. 23-26.

62. Nazarenko M.A. Function existence with given rational approximations in space $C(A)$ [*Sushchestvovanie funktsii s zadannymi ratsional'nymi priblizheniiami v prostranstve* $C(A)$]. *Vestn. MGU,* 1997, no. 4, pp. 20-22.

63. Starovoitov A.P. About a problem of sequences describing the best rational trigonometric approximations [*K probleme opisaniia posledovatel'nostei nailuchshikh trigonometricheskikh ratsional'nykh priblizhenii*]. *Matem. sb.,* 2000, vol. 191, no. 6, pp. 145-154.