

**XVIII Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям**

ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2018

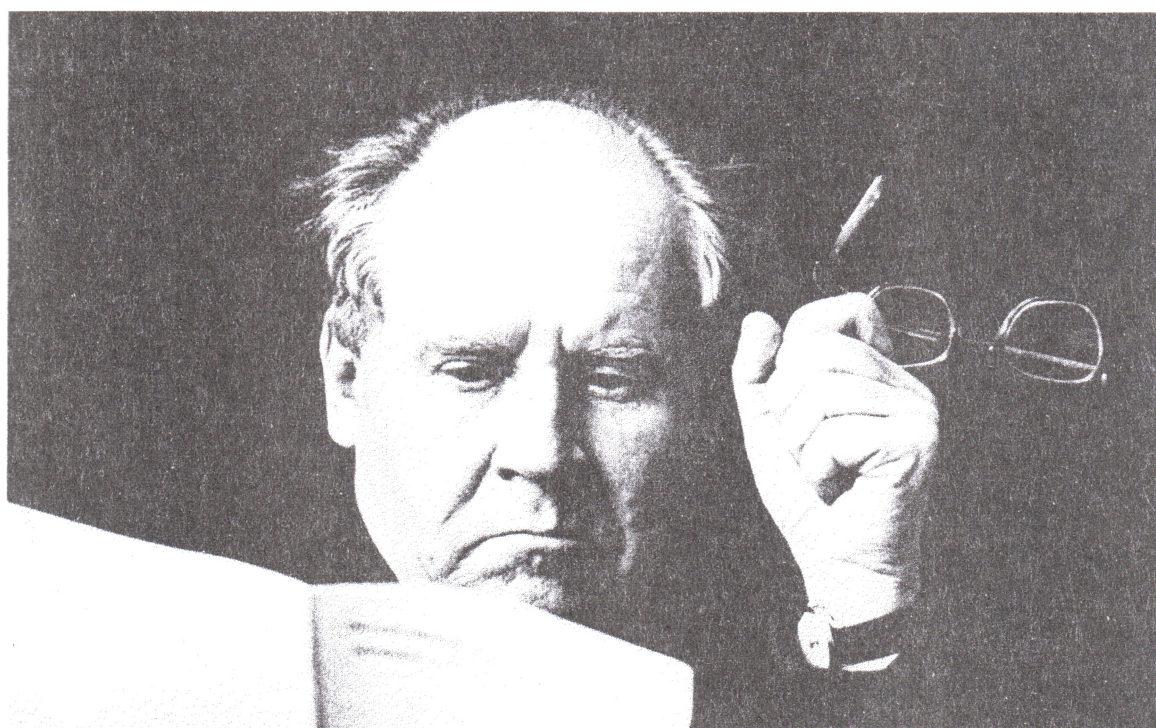
Тезисы докладов

Часть 1

15 – 18 мая 2018 года
Гродно, Беларусь

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ

XVIII Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям
(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018)



Материалы конференции

Часть 1

Аналитическая теория дифференциальных уравнений
Асимптотическая теория дифференциальных уравнений
Качественная теория дифференциальных уравнений
Теория устойчивости и управления движением

МИНСК 2018

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
В76

Редакторы:

А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров

**XVIII Международная научная конференция по дифференциальным
В76 уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018): материалы Международной на-
учной конференции. Гродно, 15–18 мая 2018 г. — Часть 1. — Мн.: Институт математики
НАН Беларуси, 2018. — 150 с.**

ISBN 978-985-7160-08-2 (Часть 1)

ISBN 978-985-7160-07-5

Сборник содержит доклады, представленные на XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2018) по вопросам аналитической, асимптотической и качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и управления движением.

О РЕЗОНАНСАХ В СИСТЕМАХ ГАМИЛЬТОНА, БЛИЗКИХ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ

А.Д. Морозов

Рассматриваются гамильтоновы системы с тремя степенями свободы, близкие к нелинейным интегрируемым. Предполагается, что невозмущенная система невырожденная. В этом случае большинство инвариантных торов невозмущенной системы сохраняются при возмущении. Множеству не сохраняющихся торов принадлежат резонансные торы. Несмотря на большое число работ по гамильтоновым системам, исследование резонансов далеко от завершения. В работе исследуется поведение решений в малых окрестностях невозмущенных резонансных торов. Приводятся усредненные системы. Устанавливаются условия существования периодических движений и двумерных инвариантных торов. Исследование иллюстрируется на примерах возмущений, содержащих только резонансные гармоники. Устанавливается возможность существования как регулярных движений, так и нерегулярных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00306).

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛИПШИЦУ РЕШЕНИЯ ДОПУСТИМО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦ-84

Э.В. Мусафиров

С помощью метода отражающей функции (ОФ) проф. В.И. Мироненко (см. [1, 2]) можно изучать качественное поведение семейств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих процессы реального мира, на основе более простых уже изученных систем (см., например, [3-6]). Решения систем дифференциальных уравнений с одинаковой ОФ имеют много одинаковых качественных свойств.

Рассмотрим систему Лоренц-84 [7], моделирующую общую циркуляцию атмосферы в средних широтах:

$$\dot{x} = -ax - y^2 - z^2 + aF, \quad \dot{y} = -y + xy - bxz + G, \quad \dot{z} = -z + bxy + xz, \quad a, b, F, G, x, y \in \mathbb{R}.$$

Для нее, при $G = 0$, получена допустимо возмущенная (с той же ОФ) система:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-ax - y^2 - z^2 + aF)(1 + \alpha_1(t)), \\ \dot{y} &= (-y + xy - bxz)(1 + \alpha_1(t)) - z\alpha_2(t), \\ \dot{z} &= (-z + bxy + xz)(1 + \alpha_1(t)) + y\alpha_2(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, 2}$ — произвольные скалярные непрерывные нечетные функции.

Преобразуем систему (1) к виду

$$\dot{x} = -(a(x - F) + w)(1 + \alpha_1(t)), \quad \dot{w} = 2w(x - 1)(1 + \alpha_1(t)),$$

где $w = y^2 + z^2$. Точки $(x, w) = (F, 0)$ и $(x, w) = (1, a(F - 1))$ — стационарные точки этой системы. Первая точка соответствует стационарному решению $x = F$,

$y = z = 0$ системы (1), а вторая — замкнутой траектории $x = 1$, $y^2 + z^2 = a(F - 1)$ (существующей при $a(F - 1) \geq 0$) системы (1).

Определение [8]. Решение в форме Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0^*)$ системы

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n,$$

называется глобально равномерно устойчивым по Липшицу, если существует константа $L > 0$ такая, что при всех $x_0 \in D$ и $t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$\|\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(t; t_0, x_0^*)\| < L\|x_0 - x_0^*\|.$$

Заметим, что из глобальной равномерной липшицевой устойчивости следует равномерная устойчивость по Ляпунову, но обратное, вообще говоря, неверно [9, 10].

Теорема. Пусть $a \geq 0$, $F \leq 1$, функции $\alpha_i = \alpha_i(t)$ ($i = 1, 2$) — непрерывные и $\alpha_1(t) \geq -1 \quad \forall t \geq 0$, тогда стационарное решение $x = F$, $y = z = 0$ системы (1) глобально равномерно устойчиво по Липшицу.

Доказательство. С помощью замены переменной $\chi = x - F$ переместим стационарное решение $(F, 0, 0)$ системы (1) в начало координат $(0, 0, 0)$. Получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= -(a\chi + y^2 + z^2)(1 + \alpha_1(t)), \\ \dot{y} &= ((\chi - 1 + F)y - b(\chi + F)z)(1 + \alpha_1(t)) - z\alpha_2(t), \\ \dot{z} &= (b(\chi + F)y + (\chi - 1 + F)z)(1 + \alpha_1(t)) + y\alpha_2(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Определим функцию $V(Y) := \|Y\|^2/2 = (\chi^2 + y^2 + z^2)/2$, где $Y = (\chi, y, z)$ и $\|Y\| = \sqrt{\chi^2 + y^2 + z^2}$ — евклидова норма. $\forall Y \in \mathbb{R}^3$ справедливы неравенства

$$v_1(\|Y\|) := \frac{1}{4}\|Y\|^2 \leq V(Y) \leq \|Y\|^2 =: v_2(\|Y\|). \quad (3)$$

$\dot{V} = -(a\chi^2 + (1 - F)(y^2 + z^2))(1 + \alpha_1(t))$ — производная функции V в силу системы (2). Пусть $Y = \varphi(t; t_0, Y_0)$ — решение системы (2). Если $a \geq 0$, $F \leq 1$ и $\alpha_1(t) \geq -1 \quad \forall t \geq 0$, тогда $\dot{V} \leq 0 \quad \forall (\chi, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и $\forall t \geq 0$. Следовательно $V(\varphi(t; t_0, Y_0)) \leq V(Y_0) \quad \forall Y_0 \in \mathbb{R}^3$ и $\forall t \geq t_0 \geq 0$. Из (3) получим $v_1(\|\varphi(t; t_0, Y_0)\|) \leq V(\varphi(t; t_0, Y_0)) \leq V(Y_0) \leq v_2(\|Y_0\|) \quad \forall Y_0 \in \mathbb{R}^3$ и $\forall t \geq t_0 \geq 0$, следовательно, $\|\varphi(t; t_0, Y_0)\| \leq v_1^{-1}(v_2(\|Y_0\|)) = 2\|Y_0\|$. Это означает глобальную равномерную устойчивость по Липшицу нулевого решения системы (2) и, значит, стационарного решения $x = F$, $y = z = 0$ системы (1). Теорема доказана.

Литература

1. Мироненко В.И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем*. Гомель: ГГУ, 2004.
2. Мусафиров Э.В. *Временные симметрии дифференциальных систем*. Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
3. Musafirov E.V. *Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function* // International journal of bifurcation and chaos. 2017. V. 27. № 10. 1750154.
4. Мусафиров Э.В. *Допустимые возмущения модели Костицына «хищник-жертва»* // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. № 7-2 (18-2). С. 248–252.
5. Мусафиров Э.В. *Допустимые возмущения системы Лэнгфорда* // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 47–51.
6. Мусафиров Э.В. *Нестационарные дифференциальные системы, эквивалентные системе Лотки — Вольтерры с логистической поправкой* // Наука Красноярья. 2012. № 1. С. 97–104.

7. Lorenz E.N. *Irregularity: a fundamental property of the atmosphere* // *Tellus*. 1984. V. 36A. № 2. P. 98–110.
8. Dishlieva K.G., Dishliev A.A. *Stability of impulsive differential equations with random impulsive moments* // *International Journal of Science Technology & Management*. 2015. V. 4. № 5. P. 162–172.
9. Dannan F. M., Elaydi S. *Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations* // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1986. V. 113. № 1. P. 562–577.
10. Liao X., Wang L., Yu P. *Stability of Dynamical Systems*. Elsevier, 2007. V. 5.

К РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

С.В. Подолян

Рассматривается задача о периодических решениях (с периодом ω) уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda^2 A(t)X + \lambda X B(t) + \lambda F_1(t) + \lambda^2 F_2(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F_i(t)$, ($i = 1, 2$) — действительные непрерывные ω -периодические матрицы соответствующих размерностей, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе, являющейся продолжением [1,2] и развитием [3, 4], на основе применения метода [5, гл. 2] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости данной задачи, а также алгоритм построения решения.

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{B}(\omega) = \int_0^\omega B(\tau) d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{B}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$h_i = \max_t \|F_i(t)\|, \quad q_1 = \frac{1}{2}\gamma\beta^2\omega^2 + \gamma\alpha\omega, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha\beta\omega^2, \quad q(\varepsilon) = q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2,$$

$$H(\varepsilon) = \frac{1}{2}\gamma\omega(h_1 + \varepsilon h_2)(\beta\omega\varepsilon + 2),$$

где $t \in [0, \omega]$.

Теорема. Пусть выполнено условие $\det \tilde{B}(\omega) \neq 0$. Тогда в области $|\lambda| < 2/(q_1 + \sqrt{q_1^2 + 4q_2})$ уравнение (1) имеет единственное ω -периодическое решение $X = X(t, \lambda)$; это решение представимо в виде ряда

$$X(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X_k(t), \quad (2)$$

сходящегося равномерно по $t \in \mathbb{R}$, при этом справедлива оценка

$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{H(\varepsilon)}{1 - q(\varepsilon)}.$$

Для построения коэффициентов ряда (2) разработан алгоритм типа [5, гл. 2]. Изучена его скорость сходимости. Исследованы структурные свойства решения $X(t, \lambda)$.

Кузьмич А.В., Кергет И.Л. Признак Дюлака — Черкаса для системы Ван дер Поля релятивистского типа	79
Лаптинский В.Н. Об оценке параметров решений периодической краевой задачи для нелинейных автономных систем	81
Ливинская В.А. О существовании и построении периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром	82
Маковецкая О.А. О периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова — Риккати с параметром	83
Маковецкий И.И. К разрешимости и построению решения двухточечной краевой задачи для нелинейно возмущенного матричного уравнения Ляпунова	85
Мироненко В.И. Условия центра для одного дифференциального уравнения	86
Морозов А.Д. О резонансах в системах Гамильтона, близких к интегрируемым	87
Мусафиров Э.В. О глобальной равномерной устойчивости по Липшицу решения допустимо возмущенной системы Лоренц-84	87
Подольян С.В. К разрешимости и построению периодических решений матричного уравнения Ляпунова с параметром	89
Роголев Д.В. О построении решения периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати с параметром	90
Садовский А.П. Об одном случае центра системы с однородными нелинейностями четвертой степени	91
Сахаров А.Н., Сидоров Е.А. Специальные тригонометрические ряды в задачах об особых периодических решениях	93
Сидоренко И.Н. Предельные циклы «нормального размера» систем Льенара с пятью особыми точками и симметричным векторным полем	94
Тыщенко В.Ю. О топологической классификации комплексных линейных дифференциальных систем	95
Шамберов В.Н., Камачкин А.М. Метод поиска вынужденных периодических решений в многосвязных нелинейных системах	97
Шамолин М.В. Случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерному многообразию	99
Шубэ А.С. Рациональные отражающие функции и условия центра для кубических дифференциальных систем	101
Cozma D.V., Dascalescu A.I. The problem of the center for a cubic system having two invariant straight lines and one invariant cubic	102
Schneider K.R., Grin A.A. Dulac — Cherkas function for the study of the bifurcation of a multiple limit cycle of the second kind	103

Теория устойчивости и управления движением

Астровский А.И., Гайшун И.В. Дискретные наблюдатели для равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем	106
Бойко В.К. Об одной задаче управления для системы уравнений гиперболического типа	107
Борковская И.М., Пыжкова О.Н. Об управляемости и стабилизируемости гибридных дискретно-непрерывных систем	108
Булатов В.И. Об одном критерии условной управляемости линейных стационарных систем	109
Гайшун И.В., Горячкин В.В., Крахотко В.В., Широканова Н.И. К управляемости дискретных 2D систем в условиях неопределенности	110
Гончарова М.Н. О построении регулярных оптимальных траекторий для одного класса линейных задач оптимального быстрогодействия с фазовым ограничением	111
Дымков М.П. Выпуклые задачи оптимизации в дискретных 2D системах управления с ограничениями	112
Задворный Я.Б. Глобальная устойчивость автономного стохастического дифференциального уравнения с запаздыванием и с разрывными коэффициентами	113
Калинин А.И., Лавринович Л.И. Асимптотическое решение задачи об управлении линейной сингулярно возмущенной системой с минимальными энергетическими затратами	115