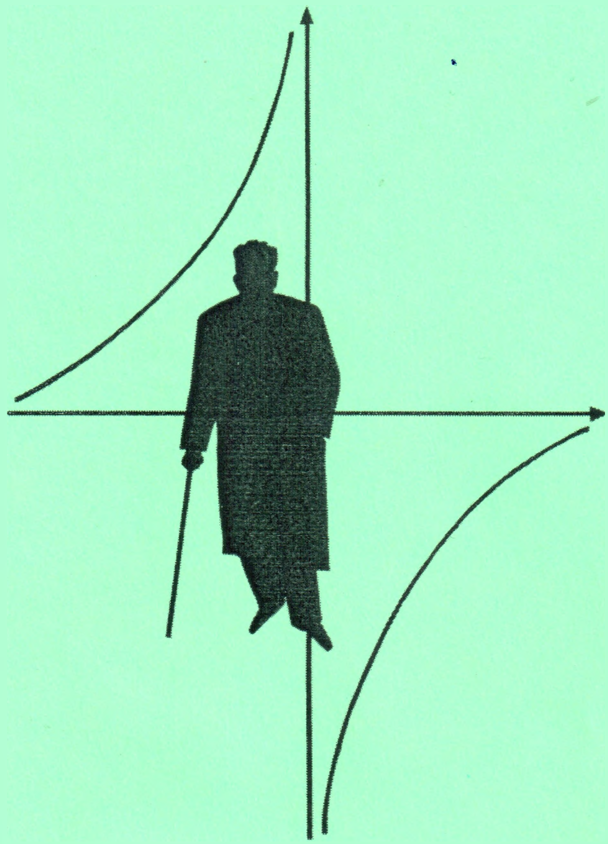


XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018

Тезисы докладов

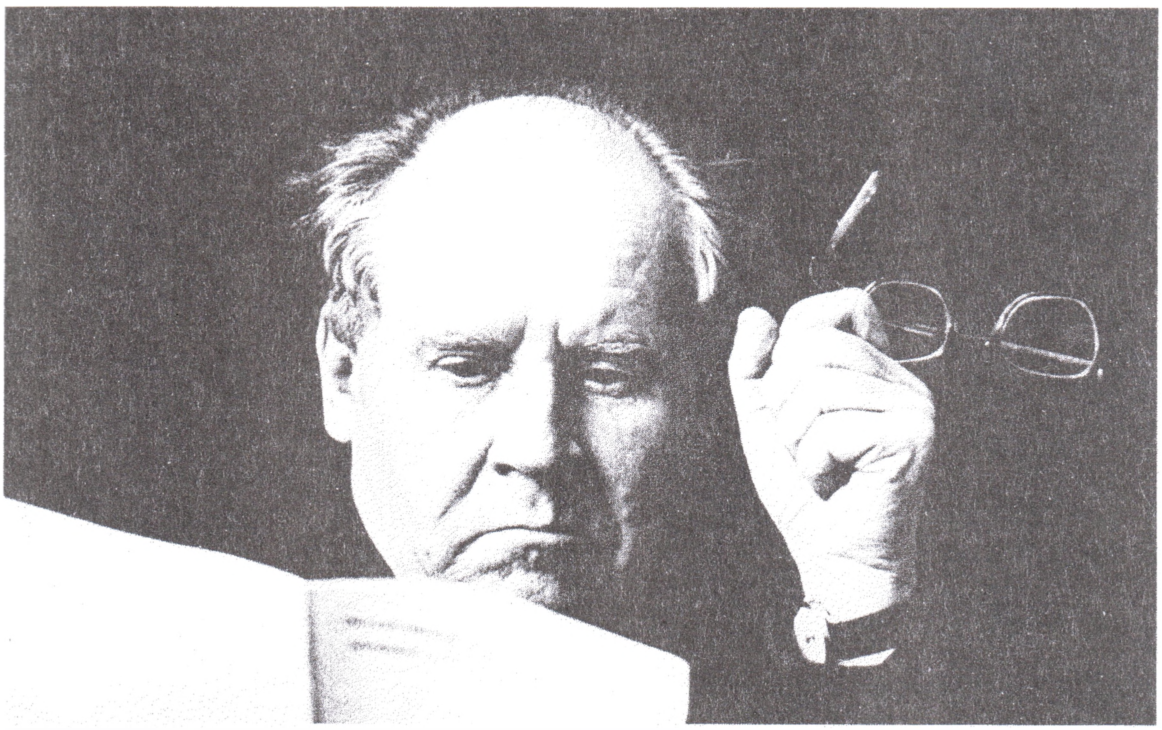
Часть 1

15 – 18 мая 2018 года
Гродно, Беларусь

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ

XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018)



Материалы конференции

Часть 1

Аналитическая теория дифференциальных уравнений
Асимптотическая теория дифференциальных уравнений
Качественная теория дифференциальных уравнений
Теория устойчивости и управления движением

МИНСК 2018

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
В76

Редакторы:
А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров

XVIII Международная научная конференция по дифференциальным
В76 **уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018)**: материалы Международной научной конференции. Гродно, 15 – 18 мая 2018 г. — Часть 1. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2018. — 150 с.

ISBN 978-985-7160-08-2 (Часть 1)
ISBN 978-985-7160-07-5

Сборник содержит доклады, представленные на XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2018) по вопросам аналитической, асимптотической и качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и управления движением.

ISBN 978-985-7160-08-2 (Часть 1)
ISBN 978-985-7160-07-5

О РЕЗОНАНСАХ В СИСТЕМАХ ГАМИЛЬТОНА, БЛИЗКИХ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ

А.Д. Морозов

Рассматриваются гамильтоновы системы с тремя степенями свободы, близкие к нелинейным интегрируемым. Предполагается, что невозмущенная система невырожденная. В этом случае большинство инвариантных торов невозмущенной системы сохраняются при возмущении. Множеству не сохраняющихся торов принадлежат резонансные торы. Несмотря на большое число работ по гамильтоновым системам, исследование резонансов далеко от завершения. В работе исследуется поведение решений в малых окрестностях невозмущенных резонансных торов. Приводятся усредненные системы. Устанавливаются условия существования периодических движений и двумерных инвариантных торов. Исследование иллюстрируется на примерах возмущений, содержащих только резонансные гармоники. Устанавливается возможность существования как регулярных движений, так и нерегулярных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00306).

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛИПШИЦУ РЕШЕНИЯ ДОПУСТИМО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦ-84

Э.В. Мусафиров

С помощью метода отражающей функции (ОФ) проф. В.И. Мироненко (см. [1, 2]) можно изучать качественное поведение семейств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих процессы реального мира, на основе более простых уже изученных систем (см., например, [3–6]). Решения систем дифференциальных уравнений с одинаковой ОФ имеют много одинаковых качественных свойств.

Рассмотрим систему Лоренц-84 [7], моделирующую общую циркуляцию атмосферы в средних широтах:

$$\dot{x} = -ax - y^2 - z^2 + aF, \quad \dot{y} = -y + xy - bxz + G, \quad \dot{z} = -z + bxy + xz, \quad a, b, F, G, x, y \in \mathbb{R}.$$

Для нее, при $G = 0$, получена допустимо возмущенная (с той же ОФ) система:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-ax - y^2 - z^2 + aF)(1 + \alpha_1(t)), \\ \dot{y} &= (-y + xy - bxz)(1 + \alpha_1(t)) - z\alpha_2(t), \\ \dot{z} &= (-z + bxy + xz)(1 + \alpha_1(t)) + y\alpha_2(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1,2}$ — произвольные скалярные непрерывные нечетные функции.

Преобразуем систему (1) к виду

$$\dot{x} = -(a(x - F) + w)(1 + \alpha_1(t)), \quad \dot{w} = 2w(x - 1)(1 + \alpha_1(t)),$$

где $w = y^2 + z^2$. Точки $(x, w) = (F, 0)$ и $(x, w) = (1, a(F - 1))$ — стационарные точки этой системы. Первая точка соответствует стационарному решению $x = F$,

$y = z = 0$ системы (1), а вторая — замкнутой траектории $x = 1$, $y^2 + z^2 = a(F - 1)$ (существующей при $a(F-1) \geqslant 0$) системы (1).

Определение [8]. Решение в форме Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0^*)$ системы

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n,$$

называется глобально равномерно устойчивым по Липшицу, если существует константа $L > 0$ такая, что при всех $x_0 \in D$ и $t \geqslant t_0$ справедливо неравенство

$$\|\varphi(t; t_0, x_0) - \varphi(t; t_0, x_0^*)\| < L\|x_0 - x_0^*\|.$$

Заметим, что из глобальной равномерной липшицевой устойчивости следует равномерная устойчивость по Ляпунову, но обратное, вообще говоря, неверно [9, 10].

Теорема. *Пусть* $a \geqslant 0$, $F \leqslant 1$, *функции* $\alpha_i = \alpha_i(t)$ $(i = 1, 2)$ *— непрерывные и* $\alpha_1(t) \geqslant -1$ $\forall t \geqslant 0$, *тогда стационарное решение* $x = F$, $y = z = 0$ *системы* (1) *глобально равномерно устойчиво по Липшицу.*

Доказательство. С помощью замены переменной $\chi = x - F$ переместим стационарное решение $(F, 0, 0)$ системы (1) в начало координат $(0, 0, 0)$. Получим систему

$$\dot{\chi} = -(a\chi + y^2 + z^2)(1 + \alpha_1(t)),$$

$$\dot{y} = ((\chi - 1 + F)y - b(\chi + F)z)(1 + \alpha_1(t)) - z\alpha_2(t),$$

$$\dot{z} = (b(\chi + F)y + (\chi - 1 + F)z)(1 + \alpha_1(t)) + y\alpha_2(t). \tag{2}$$

Определим функцию $V(Y) := \|Y\|^2/2 = (\chi^2 + y^2 + z^2)/2$, где $Y = (\chi, y, z)$ и $\|Y\| = \sqrt{\chi^2 + y^2 + z^2}$ — евклидова норма. $\forall Y \in \mathbb{R}^3$ справедливы неравенства

$$v_1(\|Y\|) := \frac{1}{4}\|Y\|^2 \leqslant V(Y) \leqslant \|Y\|^2 =: v_2(\|Y\|). \tag{3}$$

$\dot{V} = -(a\chi^2 + (1 - F)(y^2 + z^2))(1 + \alpha_1(t))$ — производная функции V в силу системы (2). Пусть $Y = \varphi(t; t_0, Y_0)$ — решение системы (2). Если $a \geqslant 0$, $F \leqslant 1$ и $\alpha_1(t) \geqslant -1$ $\forall t \geqslant 0$, тогда $\dot{V} \leqslant 0$ $\forall (\chi, y, z) \in \mathbb{R}^3$ и $\forall t \geqslant 0$. Следовательно $V(\varphi(t; t_0, Y_0)) \leqslant V(Y_0)$ $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^3$ и $\forall t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Из (3) получим $v_1(\|\varphi(t; t_0, Y_0)\|) \leqslant V(\varphi(t; t_0, Y_0)) \leqslant V(Y_0) \leqslant v_2(\|Y_0\|)$ $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^3$ и $\forall t \geqslant t_0 \geqslant 0$, следовательно, $\|\varphi(t; t_0, Y_0)\| \leqslant v_1^{-1}(v_2(\|Y_0\|)) = 2\|Y_0\|$. Это означает глобальную равномерную устойчивость по Липшицу нулевого решения системы (2) и, значит, стационарного решения $x{=}F$, $y{=}z{=}0$ системы (1). Теорема доказана.

Литература

1. Мироненко В.И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ, 2004.

2. Мусафиров Э.В. *Временные симметрии дифференциальных систем.* Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2011.

3. Musafirov E.V. *Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function* // International journal of bifurcation and chaos. 2017. V. 27. № 10. 1750154.

4. Мусафиров Э.В. *Допустимые возмущения модели Костицына «хищник-жертва»* // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. № 7-2 (18-2). С. 248–252.

5. Мусафиров Э.В. *Допустимые возмущения системы Лэнгфорда* // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 47–51.

6. Мусафиров Э.В. *Нестационарные дифференциальные системы, эквивалентные системе Лотки — Вольтерры с логистической поправкой* // Наука Красноярья. 2012. № 1. С. 97–104.

7. Lorenz E.N. *Irregularity: a fundamental property of the atmosphere* // Tellus. 1984. V. 36A. № 2. P. 98–110.

8. Dishlieva K.G., Dishliev A.A. *Stability of impulsive differential equations with random impulsive moments* // International Journal of Science Technology & Management. 2015. V. 4. № 5. P. 162–172.

9. Dannan F. M., Elaydi S. *Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1986. V. 113. № 1. P. 562–577.

10. Liao X., Wang L., Yu P. *Stability of Dynamical Systems.* Elsevier, 2007. V. 5.

К РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

С.В. Подолян

Рассматривается задача о периодических решениях (с периодом ω) уравнения

$$\frac{dX}{dt} = \lambda^2 A(t)X + \lambda X B(t) + \lambda F_1(t) + \lambda^2 F_2(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F_i(t)$, $(i = 1,2)$ — действительные непрерывные ω-периодические матрицы соответствующих размерностей, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В настоящей работе, являющейся продолжением [1,2] и развитием [3, 4], на основе применения метода [5, гл. 2] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости данной задачи, а также алгоритм построения решения.

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{B}(\omega) = \int_0^\omega B(\tau)d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{B}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$h_i = \max_t \|F_i(t)\|, \quad q_1 = \frac{1}{2}\gamma\beta^2\omega^2 + \gamma\alpha\omega, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\alpha\beta\omega^2, \quad q(\varepsilon) = q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2,$$

$$H(\varepsilon) = \frac{1}{2}\gamma\omega(h_1 + \varepsilon h_2)(\beta\omega\varepsilon + 2),$$

где $t \in [0,\omega]$.

Теорема. *Пусть выполнено условие* $\det \tilde{B}(\omega) \neq 0$. *Тогда в области* $|\lambda| < 2/(q_1 + \sqrt{q_1^2 + 4q_2})$ *уравнение* (1) *имеет единственное* ω*-периодическое решение* $X = X(t,\lambda)$; *это решение представимо в виде ряда*

$$X(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X_k(t), \tag{2}$$

сходящегося равномерно по $t \in \mathbb{R}$, *при этом справедлива оценка*

$$\|X(t,\lambda)\| \leqslant \frac{H(\varepsilon)}{1 - q(\varepsilon)}.$$

Для построения коэффициентов ряда (2) разработан алгоритм типа [5, гл. 2]. Изучена его скорость сходимости. Исследованы структурные свойства решения $X(t,\lambda)$.

Теория устойчивости и управления движением