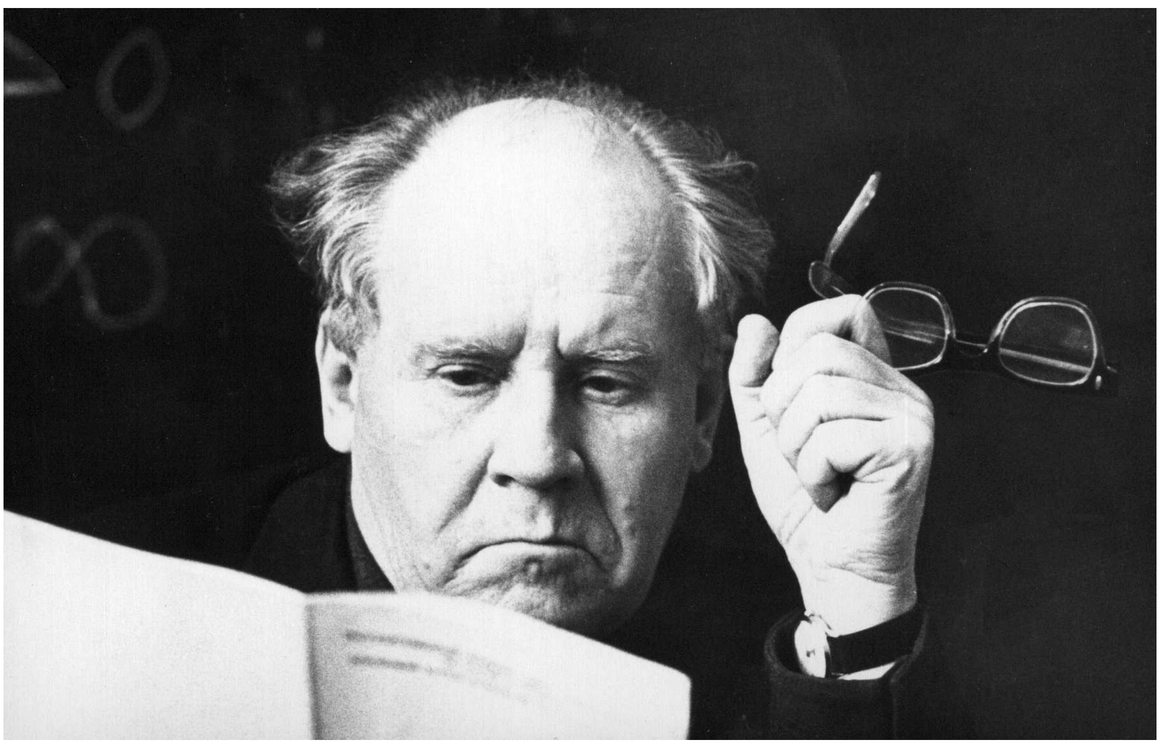
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ

XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018)



Материалы конференции

Часть 2

Уравнения в частных производных
Интегро-дифференциальные операторы и уравнения
Дифференциальные уравнения и их приложения
Методика преподавания дифференциальных уравнений в высшей школе

МИНСК 2018

УДК 517.9
ББК 22.161.6я43
В76

Редакторы:
А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров

В76 **XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018):** материалы Международной научной конференции. Гродно, 15 – 18 мая 2018 г. — Часть 2. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2018. — 164 с.

ISBN 987-985-7160-09-9 (Часть 2)
ISBN 978-985-7160-07-5

Сборник содержит доклады, представленных на XVIII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2018) по вопросам уравнений в частных производных, интегро-дифференциальных операторов и уравнений, дифференциальных уравнений их приложений, методики преподавания дифференциальных уравнений в высшей школе.

ISBN 987-985-7160-09-9 (Часть 2)
ISBN 978-985-7160-07-5

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ЗАДАЧА СТЕФАНА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ В ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Н.Г. Абрашина-Жадаева, И.А. Тимощенко

В сообщении обсуждается численная модель решения задачи Стефана при учете эффектов памяти и пространственной корреляции [1–3]. На отрезке $x \in [0,1]$ обозначим через $x = \xi(t)$, $t \geqslant 0$, границу фазового перехода, причем область $0 < x < \xi(t)$ соответствует жидкой фазе, а $\xi(t) < x < 1$ — твердой. Запишем обобщенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha}(\varkappa({}_0D_x^{\beta}T)), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

где ${}_0D_t^{1-\alpha}$ — дробная производная Римана–Лиувилля по времени, а ${}_0D_x^{\beta}$ — по пространству, $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta < 2$. При $\alpha = 1$ и $\beta = 2$ имеем классическую задачу Стефана. Зададим следующие граничные и начальные условия:

$$T(0,t) = T_1, \quad T(1,t) = T_2, \quad t > 0;$$

$$T(x,0) = \varphi(t), \quad 0 < x < 1, \quad \xi(0) = 0.$$

На границе фазового перехода имеем

$$T(\xi(t),t) = T^*, \quad T_2 < T^* < T_1;$$

$$\varkappa({}_0D_x^{\beta}T)|_{x=\xi(t)-0} - \varkappa({}_0D_x^{\beta}T)|_{x=\xi(t)+0} = \lambda\varkappa_0D_t^{\mu}\xi(t)$$

Сеточная аппроксимация поставленной задачи и предлагаемый алгоритм ее численного решения опираются на работы [3–6]. В результате численного эксперимента проводится сравнение с аналитическим решением [1].

Литература

1. Мейланов Р.П., Шабанова М.Р. *Задача Стефана в средах с фрактальной структурой* // Нелинейный мир. 2011. Т. 9. № 7. С. 411–415.

2. Учайкин В.В. *Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы* // УФН. 2003. Т. 173. № 8. С. 847–876.

3. Абрашина-Жадаева Н.Г., Тимощенко И.А. *Конечно-разностные методы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области* // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 7. С. 819–825.

4. Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г. *Разностные схемы для задач математической физики в областях произвольной формы* // Дифференц. уравнения и их применение. 1988. № 3. С. 22–30.

5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. *Вычислительная теплопередача.* М.: Книжный дом «Либроком», 2009.

6. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений.* М.: Наука, 1978.

НОВОЕ СЕМЕЙСТВО СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

И.Е. Андрушкевич, Ю.Ф. Новик

Нелинейное уравнение Шредингера (уравнение в частных производных второго порядка с кубической нелинейностью) имеет вид [1]

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}+|\psi(x,t)|^2\psi(x,t)=0. \quad (1)$$

Считается, что уравнение (1) удается интегрировать методом обратной задачи рассеяния [2]; среди полученных этим методом решений широко известными [1] являются следующие:

— солитонное решение

$$^{(0)}\psi(x,t)=\frac{1}{\cosh(t)}e^{ix/2}=\frac{2}{\exp(t)+\exp(-t)}e^{ix/2}; \quad (2)$$

— однопараметрическое семейство солитонных решений

$$^{(1)}\psi(x,t|q)=\frac{q}{\cosh(qt)}e^{iq^2x/2}; \quad (3)$$

— двухпараметрическое семейство солитонных решений

$$^{(2)}\psi(x,t|q,V)=\frac{q}{\cosh\{q(t-Vx)\}}\exp\left\{i\left(Vt+(q^2-V^2)\frac{1}{2}x\right)\right\}; \quad (4)$$

— N-солитонные решения.

Обобщенный метод Фурье разделения переменных [3] и разработанный на его основе алгоритм построения аналитических решений нелинейных уравнений математической физики [4] позволили нам получить четырехпараметрическое семейство солитонных решений, имеющее вид

$$^{(3)}\psi(x,t|a,b,q,V)=\frac{\exp\{i(Vt+(q^2-V^2)x/2+a)\}}{4b^2q^2\exp\{q(t-Vx)\}+\exp\{-q(t-Vx)\}}4bq^2. \quad (5)$$

где a,b,q,V — параметры.

Очевидно, что из всех решений, относящихся к семействам односолитонных, полученное нами решение (5) является наиболее общим. Действительно, полагая в (5) $b=(2q)^{-1}$, $a=0$, получаем двухпараметрическое семейство солитонных решений (4).

Таким образом, из изложенного следует, что, наряду с методом обратной задачи рассеяния, обобщенный метод Фурье разделения переменных может стать достаточно эффективным инструментом исследования нелинейных уравнений математической физики.

Литература

1. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. *Солитоны.* М., 2003.

2. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М., 1980.

3. Андрушкевич И.Е. *Методы разделения переменных в волновых уравнениях.* Новополоцк, 2010. 240 с.

4. Андрушкевич И.Е. *Метод построения аналитических решений нелинейных уравнений с частными производными и алгоритм решения уравнений третьего порядка специального вида* // Информатика. 2017. Т. 56. № 4. С. 16–30.

СИНГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

А.А. Битюрин

К решению уравнения Лапласа сводятся многие задачи теплопроводности, электростатики, квантовой физики (уравнение Шредингера), а также ряд задач механики. Последние возникают в некоторых случаях при проведении практических расчетов стержневых систем, испытывающих динамическую нагрузку. Динамические задачи механики известны, прежде всего, сложностью математического решения. В настоящее время исследователями продолжается активный поиск упрощения соответствующих математических моделей расчета и повышения их точности.

Пусть $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $\xi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ — две точки m-мерного евклидова пространства E_m. Введем обозначение

$$r = |x - \xi| = \left(\sum_{k=1}^{m} (x_k - \xi_k)^2 \right)^{1/2}$$

и рассмотрим функцию

$$\upsilon(x, \xi) = 1/r^{m-2} \tag{2}$$

в предположении, что $m > 2$. Будем считать ξ постоянной, так что $\upsilon(x, \xi)$ можно рассматривать, как функцию точки x. При достаточно больших $|x|$ справедливы неравенства $|\xi| < |x|/2$, $r > |x|/2$ и $\upsilon(x, \xi) < 2^{m-2}/|x|^{m-2}$.

Функция (1) удовлетворяет однородному уравнению Лапласа. Действительно, из равенства $\partial r/\partial x_k = (x_k - \xi)/r$ получаем

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x_k} = -\frac{m-2}{r^{m-1}} \frac{\partial r}{\partial x_k} = -\frac{(m-2)(x_k - \xi_k)}{r^m}.$$

Далее определяем

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_k^2} = -\frac{m-2}{r^m} + \frac{m(m-2)(x_k - \xi_k)^2}{r^{m+2}} = \frac{m-2}{m} \left(\frac{m(x_k - \xi_k)^2}{r^2} - 1 \right)$$

и после суммирования находим

$$\Delta \upsilon = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_k^2} = \frac{m-2}{r^m} \left(\frac{m}{r^2} \sum_{k=1}^{m} (x_k - \xi_k)^2 - m \right) = 0.$$

Функция $\upsilon(x, \xi)$ называется *сингулярным решением* уравнения Лапласа.

При $x \to \xi$ сингулярное решение стремится к бесконечности. При $m = 2$ функция (1) делается тождественно равной единице, поэтому такая функция не может служить сингулярным решением [1]. Это необходимо учитывать при решении соответствующих практических задач.

Отмечается, что сингулярное решение уравнения Лапласа удовлетворяет уравнению $-\Delta \upsilon = c\delta(x - \xi)$, где δ — функция Дирака, а c — постоянная [1].

Литература

1. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1970.

ОБ ОДНОМ НЕАВТОНОМНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ПАРАМЕТРА

С.М. Бородич

Рассматривается неавтономное параболическое уравнение

$$\partial_t u = \Delta u - f(u) - \varphi(u,t,\varepsilon) + g(x), \quad u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $f(u) \in \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R})$, $\varphi(u,t,\varepsilon)$ — класса C^1 по u и ε и непрерывна по t, $g(x) \in L_2(\Omega)$. Предполагается, что

$$\varphi(u,t,0) = 0, \tag{2}$$

$$(f(u) + \varphi(u,t,\varepsilon))u \geqslant -C, \quad f'(u) + \varphi'_u(u,t,\varepsilon) \geqslant -C,$$

$$|f'(u)| + |\varphi'_u(u,t,\varepsilon)| \leqslant C(1+|u|^{p_0-1}), \quad |\varphi'_\varepsilon(u,t,\varepsilon)| \leqslant C(1+|u|^{p_0}), \quad p_0 \leqslant \frac{n}{n-2},$$

$$F(u) = \int\limits_0^u f(s)\,ds \geqslant -C$$

для всех $u \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Пусть $E = H_0^1(\Omega)$. При любом ε, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, и любых $T > 0$ и $u_0 \in E$ уравнение (1) имеет единственное решение $u(t,\varepsilon)$, принадлежащее классу

$$V = L_\infty([0,T], L_2(\Omega)) \bigcap L_2([0,T], E)$$

и удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0} = u_0$ (см. [1]).

В силу условия (2) уравнение (1) автономно при $\varepsilon = 0$. В этом случае оно порождает в пространстве E полугруппу операторов $\{S_t,\ t \geqslant 0\}$, сопоставляющих начальному значению $u_0 \in E$ значение соответствующего решения в момент времени t.

Предположим, что полугруппа $\{S_t\}$ имеет конечное число стационарных точек, и пусть z_i — какая-либо из них. Обозначим через $M^H(z_i)$ совокупность всех точек $u \in E$, через которые проходят траектории $S_t u_0$, продолжаемые для всех $t \leqslant 0$ и удовлетворяющие условию: $S_t u_0 \to z_i$ в E при $t \to -\infty$. Множество $M^H(z_i)$ является гладким конечномерным многообразием (см. [2]).

Пусть B — ограниченное в E множество, U_ε — совокупность решений уравнения (1) с начальными условиями из B, определенных при $t \geqslant 0$. Определим *семейство составных предельных траекторий, соответствующих* U_ε, как множество кривых $\widetilde{u}(t)$, $t \geqslant 0$, в пространстве E, таких, что: 1) число точек разрыва $\widetilde{u}(t)$ конечно; 2) $\widetilde{u}(t) = S_t u_0$ при $0 \leqslant t < t_1$ для некоторых $u_0 \in B$ и $t_1 > 0$; 3) при $t \geqslant t_1$ $\widetilde{u}(t)$ состоит из конечного числа кусков траекторий полугруппы $\{S_t\}$, лежащих на конечномерных многообразиях $M^H(z_i)$.

Теорема. *Пусть выполнены сформулированные выше условия. Кроме того, пусть* $g(x)$ *— регулярное значение оператора* $Av = \Delta v - f(v)$, $v \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$ *(это условие обеспечивает гиперболичность неподвижных точек* z_i*). Тогда найдутся такие малые* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $q > 0$ *и достаточно большое число* C_0, *что при* $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$ *для любого* $u(\cdot,\varepsilon) \in U_\varepsilon$ *существует составная предельная траектория* $\widetilde{u}(t)$, *такая, что* $\widetilde{u}(0) = u(0,\varepsilon)$ *и*

$$\sup_{t\geqslant 0} \|u(t,\varepsilon) - \widetilde{u}(t)\| \leqslant C_0 |\varepsilon|^q,$$

где $\|\cdot\|$ *— норма в* E.

Литература

1. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир, 1972.
2. Бабин А.В., Вишик М.И. *Аттракторы эволюционных уравнений.* М.: Наука, 1989.

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ПРИМЕНЯЕМОЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ ИСКОВ В СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

А.О. Галицкая

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с однотипными заявками, общее число которых ограничено. Заявки входного потока независимо от других с вероятностью p_{0i} направляется в i-ю СМО, $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} p_{0i}=1$. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Каждая линия обслуживания СМО обрабатывает заявки по показательному закону с интенсивностью μ_i, $i=\overline{1,n}$.

Будем считать, что общее число заявок в рассматриваемой открытой сети ограничено константой K. Состояние сети определяется вектором

$$k(t)=(k_1(t),k_2(t),\ldots,k_n(t)), \tag{1}$$

где $k_i(t)$ — число заявок в системе S_i в момент времени t, $i=\overline{1,n}$. Вектор (1) в силу выше описанного является цепью Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний.

Заявка, направленная в i-ю СМО извне или с другой СМО с вероятностью $f^{(i)}$, присоединяется к очереди, а с вероятностью $1-f^{(i)}$ считается мгновенно обслуженной СМО, $0\leqslant f^{(i)}\leqslant 1$, $i=\overline{1,n}$.

Пусть φ_i, ψ_{ij}, α_i, β_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, — условные вероятности событий, определенные в работе [1].

Пусть также $\varepsilon_i(k_i,t)=\min(k_i(t),m_i)$ — число линий обслуживания, занятых в системе S_i заявками в момент времени t:

$$\varepsilon_{i2}(k_{i1},k_{i2},t)=\begin{cases} k_i(t), & k_i(t)<m_i,\\ 0, & k_{i1}(t)\geqslant m_i.\end{cases}$$

Доказано, что плотность распределения вектора (1) с точностью до $O(1/K^2)$ удовлетворяет уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A(x,t)p(x,t))+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}(p(x,t)),$$

где коэффициенты $A_i(x,t)$, $B_{ij}(x,t)$ определяются по найденным выражениям.

Полученные результаты могут быть применены при моделировании процессов обслуживания клиентов в страховых компаниях.

Литература

1. Малинковский, Ю.В. *Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками* // Автоматика и телемеханика. 1991. № 2. С. 102–110.

СООТНОШЕНИЕ ТИПА ГАУССА № 4 ДЛЯ ФУНКЦИИ ГОРНА H_3

И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев

В теории обобщенного волнового уравнения и осисеммитрического уравнения Гельмгольца важную роль играет конфлюэтная функция Горна [1]

$$H_3(\alpha,\beta;\delta;z,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m}{(\delta)_m}\frac{z^m}{m!}\frac{t^n}{n!},$$

для которой в [1] приведены два Гауссовых соотношения:

$$H_3(\alpha,\beta;\delta;z,t)-H_3(\alpha,\beta;\delta-1;z,t)=\frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)}zH_3(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z,t),$$

$$H_3(\alpha,\beta+1;\delta;z,t)-H_3(\alpha,\beta;\delta;z,t)=\frac{\alpha}{\delta}zH_3(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z,t).$$

При $t=0$ данные соотношения как частный случай перейдут в известные соотношения для функции Гаусса [2]:

$$F(\alpha,\beta;\delta;z)-F(\alpha,\beta;\delta-1;z)=\frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)}zF(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z),$$

$$F(\alpha,\beta+1;\delta;z)-F(\alpha,\beta;\delta;z)=\frac{\alpha}{\delta}zF(\alpha+1,\beta+1;\delta+1;z).$$

В работе [3] была доказана формула

$$(\delta-\beta-1)H_3(\alpha,\beta;\delta;z,t)+\beta H_3(\alpha,\beta+1;\delta;z,t)-(\delta-1)H_3(\alpha,\beta;\delta-1;z,t)=0,$$

из которой при $t=0$ как частный случай следует

$$(\delta-\beta-1)F(\alpha,\beta;\delta;z)+\beta F(\alpha,\beta+1;\delta;z)-(\delta-1)F(\alpha,\beta;\delta-1;z)=0.$$

В этой работе доказана формула

$$\delta(\alpha-(\delta-\beta)z)H_3(\alpha,\beta;\delta;z,t)-\alpha\delta(1-z)H_3(\alpha+1,\beta;\delta;z,t)+(\delta-\alpha)(\delta-\beta)\times$$

$$\times\, zH_3(\alpha,\beta;\delta+1;z,t)=\frac{\delta t}{1-\alpha}H_3(\alpha-1,\beta;\delta;z,t)-\frac{(\delta-\beta)zt}{1-\alpha}H_3(\alpha-1,\beta;\delta+1;z,t),$$

из которой при $t=0$ как частный случай следует

$$\delta(\alpha-(\delta-\beta)z)F(\alpha,\beta;\delta;z)-\alpha\delta(1-z)F(\alpha+1,\beta;\delta;z)+(\delta-\alpha)(\delta-\beta)zF(\alpha,\beta;\delta+1;z)=0.$$

Литература

1. Капилевич М.Б. *О конфлюэнтных функциях Горна* // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 9. С. 1239–1254.

2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: Наука, 1963.

3. Мавлявиев Р.М., Гарипов И.Б. *Гауссово соотношение № 12 для функций Горна H_3* // XVII Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2017): тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 16–20 мая 2017 г. Ч. 2. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2017. С. 18.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПАМЯТЬЮ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

А.Л. Гладков

Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} &u_t = \Delta u + c(t)u^p && \text{для} \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ &\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = k(t)\int\limits_0^t u^q(x,\tau)\,d\tau && \text{для} \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x) && \text{для} \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $\min(p,q) > 0$, ν — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $c(t)$ и $k(t)$ — неотрицательные непрерывные функции, определенные при $t \geqslant 0$, $u_0(x)$ – нетривиальная неотрицательная непрерывная функция, определенная при $x \in \overline{\Omega}$.

Устанавливаются условия, гарантирующие существование и отсутствие нетривиальных глобальных решений начально-краевой задачи (1). Полученные результаты зависят от поведения переменных коэффициентов при $t \to \infty$. В частности, доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Задача* (1) *не имеет нетривиальных глобальных решений, если*

$$p > 1 \quad \textit{и} \quad \int\limits_0^\infty c(t)\,dt = \infty \tag{2}$$

или

$$q > 1, \quad \int\limits_0^\infty t k(t)\,dt = \infty$$

и $k(t) \leqslant C/t^2$, $C > 0$, *для достаточно больших значений* t *или* $t^{1-q}k(t)$ *не возрастает для достаточно больших значений* t.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:* $\min(p,l) > 1$,

$$\int\limits_0^\infty \{c(t) + tk(t)\}\,dt < \infty$$

и существуют положительные постоянные α, t_0 *и* K *такие, что* $\alpha > t_0$ *и*

$$\int\limits_{t-t_0}^t \frac{\tau k(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau \leqslant K \quad \textit{для всех} \quad t \geqslant \alpha.$$

Тогда задача (1) *имеет ограниченные глобальные решения при достаточно малых значениях начальных данных.*

Положим $\ln_1 t = \ln t$, $\ln_n t = \ln \ln_{n-1} t$, $n = 2, 3, \ldots$ Из теорем 1 и 2 следует оптимальность условия (2). Кроме того, задача (1) имеет нетривиальные ограниченные глобальные решения, если

$$\int_0^\infty c(t)dt < \infty$$

и для $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, $\sigma > 1$ и достаточно больших значений t выполнено неравенство

$$k(t) \leqslant \gamma \{t^2 \ln_1 t \ldots \ln_n^\sigma t\}^{-1}.$$

Задача (1) не имеет нетривиальных глобальных решений, если

$$k(t) \geqslant \beta \{t^2 \ln_1 t \ldots \ln_n t\}^{-1}$$

для $n \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$ и достаточно больших значений t.

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО НЕЛОКАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

А.Л. Гладков, Т.В. Кавитова

Рассматривается нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = \Delta u + a(x,t) u^r \int_\Omega u^p(y,t)\,dy - b(x,t) u^q, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$u(x,t) = \int_\Omega k(x,y,t) u^l(y,t)\,dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где r, p, q, l — положительные постоянные, Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n (n \geqslant 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Относительно данных задачи (1)–(3) сделаны следующие предположения:

$$a(x,t), b(x,t) \in C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad a(x,t) \geqslant 0, \quad b(x,t) \geqslant 0;$$

$$k(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad k(x,y,t) \geqslant 0;$$

$$u_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad u_0(x) = \int_\Omega k(x,y,0) u_0^l(y)\,dy, \quad x \in \partial\Omega.$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\max(r+p, l) \leqslant 1$ *или* $l < (q+1)/2, r+p < q$ *и выполнено условие*

$$b(x,t) > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad t \geqslant 0.$$

Тогда задача (1)–(3) *имеет глобальные решения при любых начальных данных.*

Пусть $l > \max(1, (q+1)/2)$ и

$$k(x,y,t) \geqslant k_0 > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega, \quad 0 < t < t_0, \tag{4}$$

для некоторых положительных постоянных k_0 и t_0 или $r + p > \max(q, 1)$ и

$$a(x,t) \geqslant a_0 > 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < t_1, \tag{5}$$

для некоторых положительных постоянных a_0 и t_1.

Теорема 2. *Если выполнено условие* (4) *и* $l > \max(1, (q+1)/2)$ *или* (5) *и* $r + p > \max(q, 1)$, *то существуют решения задачи* (1)–(3), *которые обращаются в течение конечного времени в бесконечность.*

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В.В. Дайняк

В настоящей работе доказывается в обобщенной постановке однозначная разрешимость задачи типа Дирихле для уравнения третьего порядка, содержащего младшие производные.

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ относительно неизвестной функции $u(x)$ дифференциальное уравнение третьего порядка вида

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_0 \partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^3} +$$

$$+ c_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} d_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \mathcal{L}_1(x, D)u = f(x), \tag{1}$$

$$\mathcal{L}_1(x, D)u = \sum_{k=0}^{n} p_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} - \lambda(x) u.$$

Здесь a_k, b_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ — являются постоянными, а коэффициенты полинома $\mathcal{L}_1(x, D)$ и их производные $\partial p_k / \partial x_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ измеримы и ограничены.

Пусть $\mathcal{L}_0(\nu) = \nu_0^3 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \nu_0 \nu_k^2 + b_k \nu_k^3)$, ν — единичный вектор внешней нормали к гиперповерхности $\partial\Omega$. В области Ω рассмотрим уравнение (1) относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет граничным условиям

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega^-$ — часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathcal{L}_0(\nu) < 0$.

Вместе с задачей (1), (2) будем рассматривать и сопряженную к ней

$$\mathcal{L}^* \upsilon = g(x), \tag{3}$$

$$\upsilon\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega^+} = 0, \tag{4}$$

где $\partial\Omega^+ = \{x \in \partial\Omega | \mathcal{L}_0(\nu) > 0\}$.

Пусть $H_0^\ell(\Omega)(\mathring{H}^\ell(\Omega))$ $(l = 1, 2, 3)$ — подпространства пространства $H^\ell(\Omega)$ с учетом условий (2) и (4).

Задачи (1), (2) и (3), (4) рассматриваются как операторные уравнения

$$\mathcal{L}u = f, \quad x \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) = H_0^3(\Omega),$$

$$\mathcal{L}^*v = g, \quad x \in \mathcal{D}(\mathcal{L}^*) = \mathring{H}^3(\Omega).$$

Для доказательства разрешимости этих уравнений строим расширения L и L^* операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$.

В работе получены достаточные условия и с помощью энергетических неравенств доказывается существование и единственность обобщенного решения рассматриваемых задач (1), (2) и (3), (4).

Литература

1. Дайняк В.В., Корзюк В.И., Протько А.А. *Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка* // Вестн. БГУ. 2012. № 10. С. 116–121.

2. Дайняк В.В., Корзюк В.И., Протько А.А. *Задача типа Дирихле уравнения третьего порядка составного типа с младшими производными* // Весцi НАН Беларусi. 2013. № 4. С. 84–91.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

В.В. Карачик

Хорошо известно, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре при $n > 2$ имеет вид

$$G(x, \xi) = E(x, \xi) - E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right),$$

где $E(x, \xi) = (n-2)^{-1}|x-\xi|^{2-n}$ — элементарное решение уравнения Лапласа [1]. Имеется много работ, которые посвященны построению функции Грина для различных областей и задач, например, в секторе для бигармонического и тригармонического уравнений [2], задачи Неймана для уравнения Пуассона в полупространстве, задачи Робена в круге и т.д. В работе [3] дано представление функции Грина для третьей краевой задачи в круге.

Рассмотрим третью краевую задачу для уравнения Пуассона в шаре

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda u\right)\bigg|_{\partial S} = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $n > 2$. Сформулируем основной результат. Пусть $\Lambda_x = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C^1(\overline{S})$ *и* $\lambda > 0$. *Тогда решение задачи* (1) *можно представить в виде*

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}_\lambda(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где функция Грина $\mathcal{N}_\lambda(x,\xi)$ *имеет вид* $\mathcal{N}_\lambda(x,\xi) = E(x,\xi) - E_\lambda(x,\xi)$ *функция* $E_\lambda(x,\xi)$ *записывается в форме*

$$E_\lambda(x,\xi) = \int\limits_0^1 \hat{E}_\lambda\left(\frac{x}{|x|}, t|x|\xi\right) t^{\lambda-1}\,dt$$

и $\hat{E}_\lambda(x,\xi) = (\Lambda_x + \lambda)E(x,\xi)$.

Следствие. *Если* $H_s(x)$ *— однородный гармонический полином степени* s, *то*

$$-\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \mathcal{N}_\lambda(x,\xi)|\xi|^{2k} H_s(\xi)\,d\xi = \frac{|x|^{2k+2} - (2k+2+s+\lambda)/(s+\lambda)}{(2k+2)(2k+2s+n)} H_s(x).$$

Доказательство теоремы опирается на результаты работ [4, 5].

Основной результат дополняет следующая теорема.

Теорема 2. *Функция Неймана* $\mathcal{N}(x,\xi)$ *задачи* (1) *при* $\lambda = 0$ *имеет вид*

$$\mathcal{N}(x,\xi) = E(x,\xi) - E_0(x,\xi),$$

где функция $E_0(x,\xi)$ *записывается в форме*

$$E_0(x,\xi) = \int\limits_0^1 \left(\hat{E}\left(\frac{x}{|x|}, t|x|\xi\right) + 1\right)\frac{dt}{t}$$

и $\hat{E}(x,\xi) = \Lambda_x E(x,\xi)$.

Литература

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.

2. Ying Wang, Liuqing Ye. *Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector* // Complex Variables Elliptic Equ. 2013. V. 58. № 1. P. 7–22.

3. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. *On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle* // Adv. Pure Appl. Math. 2015. V. 6. № 3. P. 163–172.

4. Карачик В.В., Антропова Н.А. *О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре* // Сиб. журн. индустриальной математики. 2012. Т. XV. № 2. С. 86–98.

5. Карачик В.В. *Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1038–1047.

ОБ УРАВНЕНИЯХ НАВЬЕ — СТОКСА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

С.С. Каянович

Пусть уравнения Навье — Стокса (плотность $\rho = 1$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \nu\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^{2} u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (x,t)\in\Omega_T, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad x\in[0,L]\times(0,H), \quad t\in[0,T] \tag{2}$$

описывают течение вязкой несжимаемой жидкости в канале Ω_T. Здесь

$$x=(x_1,x_2),\quad \Omega=(0,L)\times(0,H),\quad S_1=[0\leqslant x_1\leqslant L, x_2=0],$$

$$S_2=[0\leqslant x_1\leqslant L, x_2=H],\quad S_3=[x_1=0, 0\leqslant x_2\leqslant H],\quad S_4=[x_1=L, 0\leqslant x_2\leqslant H].$$

$S=S_1\bigcup S_2\bigcup S_3\bigcup S_4$ — граница Ω, $\quad \overline{\Omega}=\Omega\bigcup S,\quad \Omega_T=\Omega\times(0,T],\quad S_T=S\times(0,T],$

$$\overline{\Omega}_T=\overline{\Omega}\times[0,T],\quad S_{\bigcup}=S_1\bigcup S_2,\quad S_{\bigcup T}=S_{\bigcup}\times(0,T],$$

S_1, S_2 — твердые стенки канала. Рассмотрим задачу: найти достаточно гладкое в замкнутой области $\overline{\Omega}_T$ решение системы (1), (2), удовлетворяющее условиям

$$u_i|_{t=0}=\overline{b_i}(x),\quad x\in\overline{\Omega};\quad \int\limits_0^H\frac{\partial\overline{b_1}(x_1,z)}{\partial x_1}\,dz=0;\quad \overline{b_i}|_{S_{\bigcup}}=0,\quad u_i|_{S_T}=\varphi_i(x,t),\quad \varphi_i|_{S_{\bigcup T}}=0,\quad (3)$$

где $\varphi_i|_{S_{\bigcup T}}=0$ — условия прилипания.

В силу (3) $\left.\dfrac{\partial u_i}{\partial x_1}\right|_{S_{\bigcup T}}=\left.\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right|_{S_{\bigcup T}}=0$ $(i=1,2)$, а в силу (2), если функция $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega}_T$, должно быть $\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{S_{\bigcup T}}=-\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{S_{\bigcup T}}=-\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right|_{S_{\bigcup T}}=0.$ Значит, для функции u_2 на части границы $S_{\bigcup T}$, кроме условия $u_2|_{S_{\bigcup T}}=\varphi_2$, должно выполняться еще условие $\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{S_{\bigcup T}}=-\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right|_{S_{\bigcup T}}$, которое является излишним и может сказаться на разрешимости задачи [1]. Действительно, при малых числах Рейнольдса Re поперечная компонента скорости $u_2\equiv 0$, производная $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\equiv 0$ и равенство $\left.\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{S_{\bigcup T}}=-\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right|_{S_{\bigcup T}}=0$ выполняется автоматически. При больших числах Re указанная производная $\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}$ не равна нулю (она положительна в оболочке течения и отрицательна в его стержне) [2].

В связи со сказанным предлагается следующая модель течения вязкой жидкости:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\nu\sum_{k=1}^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^2 u_k\frac{\partial u_1}{\partial x_k}-\frac{\partial p}{\partial x_1},\quad (x,t)\in\widetilde{\Omega}_T,\qquad (4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=0,\quad (x,t)\in\Omega_{iT},\quad i=1,2;\quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}=0,\quad (x,t)\in\Omega_T',\qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^2\frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^2\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=0,\quad (x,t)\in\widetilde{\Omega}_T,\qquad (6)$$

$$u_1|_{t=0}=b(x),\quad x\in\widetilde{\Omega}, u_1|_{\widetilde{S}_T}=\widetilde{\psi_1}(s,t),\quad (s,t)\in\widetilde{S}_T, u_2|_{S_{iT}}=0,\quad i=1,2,\qquad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \overline{n}}|_{\widetilde{S}_T}=\zeta(s)\sum_{j=1}^2\omega_j(s,t)\cos\alpha_j,\quad \omega_i=\nu\sum_{k=1}^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^2 u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\frac{\partial u_i}{\partial t},\qquad (8)$$

где $\zeta(x)$ — срезающая функция, где $\left.\dfrac{\partial p}{\partial \overline{n}}\right|_{\widetilde{S}_T}$ — производная по направлению вектора $\overline{n}$ внутренней нормали к $\widetilde{S}_T$, α_i — угол между вектором $\overline{n}$ и осью Ox_i, $\widetilde{\Omega}$ — область, ограниченная кривой $\widetilde{S}$, $\overline{\widetilde{\Omega}} = \widetilde{\Omega} \bigcup \widetilde{S}$, $\widetilde{S} = \widetilde{S}_1 \bigcup \widetilde{S}_2 \bigcup \widetilde{S}_3 \bigcup \widetilde{S}_4$, где

$$\widetilde{S}_1 = \left[0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{\delta}{2},\ x_2 = \theta_1(x_1)\right] \bigcup \left[\frac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \frac{\delta}{2},\ x_2 = 0\right] \bigcup \left[L - \frac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L,\ x_2 = \phi_1(x_1)\right],$$

$$\widetilde{S}_2 = \left[0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{\delta}{2},\ x_2 = \theta_2(x_1)\right] \bigcup \left[\frac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L - \frac{\delta}{2},\ x_2 = H\right] \bigcup \left[L - \frac{\delta}{2} \leqslant x_1 \leqslant L,\ x_2 = \phi_2(x_1)\right],$$

$$\widetilde{S}_3 = [x_1 = 0,\ \theta_1(0) \leqslant x_2 \leqslant \theta_2(0)], \quad \widetilde{S}_4 = [x_1 = L,\ \phi_1(L) \leqslant x_2 \leqslant \phi_2(L)],$$

$$\Omega_1 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L,\ 0 < x_2 \leqslant \varepsilon], \quad \Omega_2 = [0 \leqslant x_1 \leqslant L,\ H - \varepsilon \leqslant x_2 < H],$$

$$\Omega_{iT} = \Omega_i \times [0, T], \quad i = 1, 2, \quad \Omega' = [0 \leqslant x_1 \leqslant L,\ \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1],$$

$$\widetilde{\Omega}'_T = \widetilde{\Omega}' \times [0, T], \quad \widetilde{\Omega}_T = \widetilde{\Omega} \times [0, T], \quad \widetilde{S}_T = \widetilde{S} \times [0, T], \quad \overline{\widetilde{\Omega}}_T = \overline{\widetilde{\Omega}} \times [0, T],$$

ε, δ — малые положительные числа, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$.

Введем обозначения:

$$\overline{\Omega}_\delta = [\delta \leqslant x_1 \leqslant L - \delta,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant H], \quad \overline{\Omega}_{\delta T} = \overline{\Omega}_\delta \times [0, T],$$

$$\Omega_\delta = [\delta < x_1 < L - \delta,\ 0 < x_2 < H], \quad \Omega_{\delta T} = \Omega_\delta \times [0, T].$$

В работе [3] доказано, что решение системы (4)–(8), в классе достаточно гладких функций, существует и единственно на слоях $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, 2, \ldots, M$, $\tau > 0$, расположенных в области $\overline{\Omega}_{\delta T}$, и оно удовлетворяет уравнению (2) в области $\Omega_{\delta T}$.

Если обозначить $A = \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{2} u_k \dfrac{\partial u_2}{\partial x_k} + \dfrac{\partial p}{\partial x_1}$, то из (4) и (6) с учетом (2) легко получить равенство

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 -$$

$$- \nu \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \sum_{k=1}^{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = 0. \qquad (9)$$

Вычитая из (9) уравнение (2) $(i = 1)$, продифференцированное по x_1, получим уравнение $\dfrac{\partial A}{\partial x_2} = 0$, интегрирование которого по x_2 с условиями (8) дает $A = 0$ в области $\Omega_{\delta T}$ на слоях $t_m = m\tau$. Имеет место

Теорема. *Решение задачи* (4)–(8), *гладкость которого определена в* [3], *удовлетворяет всем уравнениям системы* (1), (2) *при больших числах Рейнольдса в области* $\Omega_{\delta T}$ *(на слоях* $t_m = m\tau$*)*.

Литература

1. Каянович С.С. *Уравнения Навье — Стокса и парадоксы вязкой несжимаемой жидкости* // Тр. БГТУ. Вып. 2. Сер. V. С. 49–55.

2. Каянович С.С. *Стержневое течение вязкой жидкости* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-тэхн. навук. 2013. № 3. С. 32–35.

3. Каянович С.С. *Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

СИММЕТРИЯ И ВОЗМУЩЕНИЕ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ О РАЗВЕТВЛЯЮЩИХСЯ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

И.В. Коноплева

Методами группового анализа для построения и исследования уравнения разветвления (УР) в работах [3, 4] определена асимптотика разветвляющихся решений нелинейных задач на собственные значения

$$\Delta u + \lambda^2 \left\{ \begin{array}{c} \sinh u \\ \sin u \end{array} \right\} = 0, \qquad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$a)\ \Lambda_{(a)} : u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{или} \quad b)\ \Lambda_{(b)} : \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

в квадрате, прямоугольнике, круге. Эти задачи имеют приложения в теории низкотемпературной плазмы и дифференциальной геометрии. Теория применения методов группового анализа в задачах теории ветвления изложена в обзорах [1–3]. Доказано, что общий вид УР определяется группой его симметрии, от задачи к задаче меняются только значения его коэффициентов.

Если уравнения рассматриваются в области больших размеров, они допускают группу движений $\mathbb{R}^2$. Если же область ограничена, то ее вид влечет симметрию задачи относительно допускаемой ею группы преобразований.

Для области $\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ задачи на собственные значения (1) и (2) $a)$, $b)$ допускают однопараметрическую группу $O(2)$ вращений-отражений и порядок двумерного УР можно понизить на единицу. Построено уравнения разветвления для задач (1), (2) $a)$, $b)$ и однопараметрические семейства решений представлены в виде сходящихся рядов по малому параметру $\varepsilon^{1/2}$.

В данной работе рассмотрены задачи (1), (2) в которых линейное преобразование $\zeta = \frac{a}{r}x$, $\eta = y$ переводит круг Ω в эллипс. Методами, изложенными в [5], решена задача о возмущении собственных значений и собственных функций линеаризованной задачи и получена асимптотика семейств разветвляющихся решений для нелинейно возмущенного уравнения Гельмгольца в эллиптической области.

Аналогичные результаты получены для (1), (2) $a)$, $b)$ в прямоугольной области

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

которая заменой переменных переводится в возмущенную область

$$\Omega_\nu = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad -\nu g(x) \leqslant y \leqslant 1 + \nu g(x)\}.$$

Здесь $g(0) = 0$, $g(1) = 0$, $g(x)$ — 2π-периодическая дважды непрерывно дифференцируемая функция, ν — действительный малый параметр $|\nu| < 2M^{-1}$, $M = \max\limits_{x\in[0,1]} g(x)$.

Теми же методами решаются задачи о возмущении круга и квадрата для уравнения общего вида $\Delta u + \lambda^2(u + a_2u^2 + \dots) = 0$.

Литература

1. Логинов Б.В. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности.* Ташкент: Фан, 1985.

2. Логинов Б.В. *Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия* // Вестн. Самар. ун-та. 1998. № 4 (10). С. 15–70.

3. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.*Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. MIA.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. V. 550.

4. Логинов Б.В., Коноплева И.В. *Симметрия области и задачи о периодических решениях нелинейно возмущенного уравнения Гельмгольца* // Тр. Средневолж. мат. о-ва. 2003. Т. 5. № 1. С. 38–38.

5. Рахимов В.С. *Вопросы регуляризации в задачах на собственные значения* Дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Нац. ун-т Узбекистана. Ташкент, 2014. С. 132.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

В.И. Корзюк, Н.В. Винь

Изучается классическое решение граничной задачи для строго гиперболического уравнения четвертого порядка в случае двух независимых переменных с четырьмя различными семействами характеристик. Оператор уравнения представляет собой композицию дифференциальных операторов первого порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах — периодические условия. Методом характеристик выписывается в аналитическом виде решение рассматриваемой задачи. Доказывается единственность решения.

В замыкании $\bar{Q} = [0,\infty) \times [0,l]$ области $Q = (0,\infty) \times (0,l)$ двух независимых переменных $(t,x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$ задано одномерное уравнение

$$\mathbb{L}u = (\partial_t - a^{(1)}\partial_x)(\partial_t - a^{(2)}\partial_x)(\partial_t - a^{(3)}\partial_x)(\partial_t - a^{(4)}\partial_x)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q}, \quad (1)$$

К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$\partial_t^j u(0,x) = \varphi_j(x), \quad j = 0,1,2,3, \quad x \in [0,l], \quad (2)$$

и однородные периодические граничные условия

$$u(t,0) = u(t,l), \quad \partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,l), \quad \partial_x^2 u(t,0) = \partial_x^2 u(t,l),$$

$$\partial_x^3 u(t,0) = \partial_x^3 u(t,l), \quad t \geqslant 0. \quad (3)$$

Здесь $f : \bar{Q} \ni (t,x) \to f(t,x) \in \mathbb{R}$, $\varphi_j : [0,l] \ni x \to \varphi_j(x)$, $j = 0,1,2,3,$ — заданные функции. Для определенности предположим, что $a^{(1)}, a^{(3)} < 0$ и $a^{(2)}, a^{(4)} > 0$.

Лемма 1. *Общее решение уравнения* (1) *из класса четыреждынепрерывно дифференцируемых функций* $C^4(\overline{Q})$ *представляется в виде суммы*

$$u(t,x) = g_1(x + a^{(1)}t) + g_2(x + a^{(2)}t) + g_3(x + a^{(3)}t) + g_4(x + a^{(4)}t) + v_p(t,x), \quad (4)$$

где g_j $(j = \overline{1,4})$ *— произвольные функции с областями определения* $D(g_1), D(g_3) = ((-\infty,l])$, $D(g_2), D(g_4) = ([0,+\infty))$, *если* $(t,x) \in \overline{Q}$ *и* v_p *— частное решение уравнения* (1).

Теорема 1. *Общее решение* (4) *уравнения* (1) $u(t,x) \in C^4(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда*

$$g_1, g_3 \in C^4(-\infty,l], \quad g_2, g_4 \in C^4[0,\infty), \quad v_p(t,x) \in C^4(\overline{Q}).$$

Чтобы функции g_2, g_4 принадлежали классу $C^4([0,+\infty))$, а функции g_1, g_3 — классу $C^4((-\infty, l])$, кроме требований на гладкость заданных функций задачи (1) должны выполняться равенства для $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ в общих точках соприкосновения

$$d^p g_1^{(k+1)}(-kl) = d^p g_1^{(k)}(-kl), \quad p = \overline{0,4},$$

$$d^p g_2^{(k+1)}(l+kl) = d^p g_2^{(k)}(l+kl), \quad p = \overline{0,4},$$

$$d^p g_3^{(k+1)}(-kl) = d^p g_3^{(k)}(-kl), \quad p = \overline{0,4},$$

$$d^p g_4^{(k+1)}(l+kl) = d^p g_4^{(k)}(l+kl), \quad p = \overline{0,4}.$$

Теорема 2. *Предположим, что функции* $\varphi_j \in C^{4-j}([0,l])$, $j = \overline{0,3}$, *и* $f \equiv 0$. *В классе функциий* $C^4(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение задачи* (1) – (3) *при выполнении условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$d^i\varphi_j(0) = d^i\varphi_j(l), \quad j = \overline{0,3}, \quad i = \overline{0,4-j}.$$

Теорема 3. *Предположим, что функции* $\varphi_j \in C^{4-j}([0,l])$, $j = \overline{0,3}$ *и* $f \in C^2(\overline{Q})$. *В классе функций* $C^4(\overline{Q})$ *существует единственное классическое решение задачи* (1) – (3) *при выполнении условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$d^i\varphi_j(0) = d^i\varphi_j(l), \quad j = \overline{0,3}, \quad i = \overline{0,4-j}, \quad f(0,0) = f(0,l).$$

Литература

1. Корзюк В.И., Винь Н.В. *Решение задачи для нестрого гиперболического с двукратными характеристиками уравнения* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2017. № 1. С. 38–52.

2. Korzyuk V.I., Vinh N.V. *Exact solutions for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations* // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2016. V. 7. № 5. P. 869–879.

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, УПРАВЛЕНИЕ ЗАДАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЗАДАЧ ИХ РЕШЕНИЯМИ

В.И. Корзюк, И.С. Козловская, В.П. Сериков, В.А. Севастюк, С.Н. Наумовец

Данное сообщение ставит своей целью с помощью характеристического параллелограмма представлять решения смешанных задач в форме, удобной для дальнейшего анализа.

Для примера рассмотрим первую смешанную задачу для одномерного волнового уравнения.

На замыкании $\bar{Q} = [0,\infty) \times [0,l]$ области $Q = (0,\infty) \times (0,l)$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1) \in Q \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2 - a^2\partial_{x_1}^2)u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2, l — положительные действительные числа. К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1), \quad \partial_{x_0}u(0,x_1)=\psi(x_1), \quad x_1\in[0,l], \tag{2}$$

и граничные условия на других частях границы ∂Q

$$u(x_0,0)\mu^{(1)}(x_0), \quad u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0), \quad x_0\in[0,l], \tag{3}$$

Здесь $f,\varphi,\psi,\mu^{(j)}$, $j=1,2,$ — заданные функции.

Суть метода характеристического параллелограмма заключается в следующем.

1. Методом характеристик в аналитическом виде находится решение задачи (1)–(3).

Теорема. *Пусть для функций задачи* (1) – (3) *выполнены включения* $\varphi\in C^2([0,l])$, $\psi\in C^1([0,l])$, $f\in C^1(\bar{Q})$, $\mu^{(j)}\in C^2([0,\infty))$, $j=1,2$. *Единственное классическое решение из класса* $C^2(\bar{Q})$ *данной задачи существует в аналитическом виде тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования*

$$\mu^{(1)}(0)-\varphi(0)=0 \quad \psi(0)-d\mu^{(1)}(0)=0, \quad d^2\mu^{(1)}(0)-a^2d^2\varphi(0)-f(0,0)=0, \tag{4}$$

$$\mu^{(2)}(0)-\varphi(l)=0 \quad d\mu^{(2)}(0)-\psi(l)=0, \quad d^2\mu^{(2)}(0)-a^2d^2\varphi(l)-f(0,l)=0, \tag{5}$$

2. С помощью характеристического параллелограмма классическое решение задачи (1) – (3) записывается в виде формулы

$$u((\boldsymbol{x})=u(A^{(k)})=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j[u(B^{(j)})-v_p(B^{(j)})]+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j[u(C^{(j)})-v_p(C^{(j)})]+$$
$$+v_p(A^{(k)})-v_p(A^{(1)})-u(A^{(1)}), \tag{6}$$

где $A^{(1)}=(x_0-(k-1)l/a, l-x_1)$, k — четное число, $\boldsymbol{x}\in Q^{(k)}$, $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)$;

$$u((\boldsymbol{x})=u(A^{(k)})=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j[u(B^{(j)})-v_p(B^{(j)})]+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j[u(C^{(j)})-v_p(C^{(j)})]+$$
$$+v_p(A^{(k)})-v_p(A^{(1)})+u(A^{(1)}), \tag{7}$$

где $A^{(1)}=(x_0-(k-1)l/a, x_1)$, k — нечетное число, $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1)$;

$$B^{(j)}=\begin{cases}(x_0-x_1/a-(k-j)l/a,0), & j=k,k-2,k-4,\dots,\\ (x_0+x_1/a-(k-j+1)l/a,0), & j=k-1,k-3,\dots,\end{cases}$$

$$C^{(j)}=\begin{cases}(x_0+x_1/a-(k-j-1)l/a,l), & j=k,k-2,k-4,\dots,\\ (x_0-x_1/a-(k-j)l/a,l), & j=k-1,k-3,\dots.\end{cases}$$

В формулах (6)–(7) точка $A^{(1)}$ принадлежит прямоугольнику $\overline{Q^{(1)}}=[0,l/a]\times[0,l]$.

Продолжая дальше формулы (6) и (7) заканчиваются значениями функции на отрезке $\{\boldsymbol{x}\in\overline{Q^{(1)}}|x_0=0,\ x_1\in[0,l]\}$, т.е. заданными функциями φ и ψ из условий Коши (2).

Формулы (6), (7) удобны для численной реализации решения задачи (1)–(3), геометрической интерпретации, анализа связей полученного решения с заданными функциями. В частности:

— изучается задача управления решением и его производными задачи (1)–(3) с помощью заданных на границе ∂Q функций;

— управление решением задачи $(1)-(3)$ через заданные функции на нескольких сечениях области Q;

— изучается задача Дирихле в прямоугольнике для волнового уравнения и т.д.

Метод характеристического параллелограмма применяется для других задач и уравнений.

Литература

1. Кастильо Ф.А., Корзюк В.И. *Общие краевые задачи для линейных гиперболических уравнений второго порядка. II* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1986. № 1. С. 47–53.

2. Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Севастюк В.А. *О классическом решении второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения* // Труды Ин-та математики. (в печати).

3. Корзюк В.И. *Метод характеристического параллелограмма на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения* // Докл. НАН Беларуси. 2017. Т. 61. № 3. С. 7–13.

4. Корзюк В.И., Наумовец С.Н., Сериков В.П. *Метод характеристического параллелограмма решения второй смешанной задачи для одномерного волнового уравнения* // Тр. Ин-та математики. (в печати).

5. Корзюк В.И., Козловская И.С. *Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в заданный момент времени. I* // Тр. Ин-та математики. 2010. Т. 18. № 2. С. 22–35.

6. Корзюк В.И., Козловская И.С. *Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в заданный момент времени. II* // Тр. Ин-та математики. 2011. Т. 19. № 1. С. 62–70.

7. Korzyuk V.I., Kovnatskaya O.A. *Strong Solution of Boundary Value Problem in Cylindrical Domain for a Fourth-Order Equation of Composite Type with Dirichlet Conditions on the Lateral Surface* // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Mathematical physics and modeling in economics, finance and education. Wydawnictwo WSFiZ. Siedlce, 2011. P. 58–67.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ПОЛИНОМОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В.И. Корзюк, С.Н. Наумовец

В замыкании $\bar{Q} = [0,\infty) \times [0,l]$ области $Q = (0,\infty) \times (0,l)$ двух независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, x_1) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{Q}, \tag{1}$$

где a^2, l — положительные действительные числа. К уравнению (1) на нижней части границы области присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \tag{2}$$

и граничные условия

$$u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad P_2(\partial_{x_1}) u(x_0, l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty), \tag{3}$$

где $P_2(\partial_{x_1})$ — дифференциальный полином второго порядка от производной оператора производной ∂_{x_1}.

Здесь $f : \bar{Q} \ni x \to f(x)$ — заданная функция на $\bar{Q}$, $\varphi : [0,l] \ni x_1 \to \varphi(x_1) \in \mathbb{R}$, $\psi : [0,l] \ni x_1 \to \psi(x_1) \in \mathbb{R}$ — функции на $[0,l]$, $\mu^{(j)} : [0,\infty) \ni x_0 \to \mu^{(j)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,$ — заданные функции на $[0,\infty)$.

В аналитическом виде строится классическое решение задачи (1)–(3) и выписываются необходимые и достаточные условия на заданные функции в условиях этой задачи в точках $(0,0)$ и $(0,l)$, при выполнении которых существует единственное решение изучаемой задачи.

Литература

1. Корзюк В.И., Козловская И.С., Наумовец С.Н. *Классическое решение первой смешанной задачи одно-мерного волнового уравнения с условиями типа Коши* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. №1. С. 7–20.

2. Корзюк В.И., Наумовец С.Н. *Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях* // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 3. С. 11–17.

3. Корзюк В.И. *Уравнения математической физики.* Мн.: БГУ, 2011.

ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА — ФОКА С НЕОДНОРОДНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОГЛАСОВАНИЯ

В.И. Корзюк, И.И. Столярчук

В области $Q = (0,+\infty)\times(0,l)$ задается одномерное уравнение Клейна — Гордона — Фока

$$\partial_t^2 u - a^2\partial_x^2 u - \lambda(t,x)u = f(t,x), \tag{1}$$

где λ и f — функции, заданные на множестве $\overline{Q} = [0,l]\times\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

К уравнению (1) присоединяются начальные

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

и граничные условия

$$u(t,0) = \mu^{(0)}(t), \quad u(t,l) = \mu^{(l)}(t), \quad t \in [0,\infty). \tag{3}$$

Рассмотрим область $\tilde{Q} = \{(t,x) \in Q : x+at \neq (k+1)l \wedge x-at \neq -kl,\ k=0,1,2,\dots\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнены включения* $\lambda, f \in C^1(\overline{Q})$, $\mu^{(0)} \in C^2([0+\infty))$, $\mu^{(l)} \in C^2([0,+\infty))$, $\varphi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$. *Решение задачи* (1)–(3), *удовлетворяющее условиям сопряжения*

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at-kl) = \sigma_0^{(k)},$$

$$[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-](t, x = at-kl) = \sigma_1^{(k)} - \frac{\sigma_0^{(k)}}{4a^2}\int\limits_{kl}^{-kl+2at} \lambda\left(\frac{\eta+kl}{2a}, \frac{\eta-kl}{2}\right)d\eta,$$

$$[(\partial_x^2 u)^+ - (\partial_x^2 u)^-](t, x = at-kl) = \sigma_2^{(k)} + \frac{\sigma_1^{(k)}}{4a^2}\int\limits_{-kl+2at}^{kl} \lambda\left(\frac{\eta+kl}{2a}, \frac{\eta-kl}{2}\right)d\eta +$$

$$+\frac{\sigma_0^{(k)}}{2a^2}\Bigg(\int\limits_{-kl+2at}^{kl}\frac{1}{4}\partial_x\lambda\Big(\frac{\eta+kl}{2a},\frac{\eta-kl}{2}\Big)-\frac{1}{4a}\partial_t\lambda\Big(\frac{\eta+kl}{2a},\frac{\eta-kl}{2}\Big)-$$

$$-\frac{1}{8a^2}\int\limits_{kl}^{2a\eta-kl}\lambda\Big(\frac{\eta_1+kl}{2a},\frac{\eta_1-kl}{2}\Big)d\eta_1\lambda\Big(\frac{\eta+kl}{2a},\frac{\eta-kl}{2}\Big)d\eta+\lambda\Big(\frac{kl}{a},0\Big)-\lambda(t,-kl+at)\Bigg),\quad j=1,3,$$

$$[(u)^+-(u)^-](t,x=(k+1)l-at)=\delta_0^{(k)},$$

$$[(\partial_x u)^+-(\partial_x u)^-](t,x=(k+1)l-at)=\delta_1^{(k)}+\frac{\delta_0^{(k)}}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l-2at}^{-(k-1)l}\lambda\Big(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\Big)d\xi,$$

$$[(\partial_x^2 u)^+-(\partial_x^2 u)^-](t,x=(k+1)l-at)=\delta_2^{(k)}+\frac{\delta_1^{(k)}}{4a^2}\int\limits_{(k+1)l-2at}^{-(k-1)l}\lambda\Big(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\Big)d\xi+$$

$$+\frac{\delta_0^{(k)}}{2a^2}\Bigg(\int\limits_{(k+1)l-2at}^{-(k-1)l}\frac{1}{4}\partial_x\lambda\Big(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\Big)+\frac{1}{4a}\partial_t\lambda\Big(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\Big)+$$

$$+\frac{1}{8a^2}\int\limits_{(k+1)l-2a\xi}^{-(k-1)l}\lambda\Big(\frac{(k+1)l-\xi_1}{2a},\frac{(k+1)l+\xi_1}{2}\Big)d\xi_1\lambda\Big(\frac{(k+1)l-\xi}{2a},\frac{(k+1)l+\xi}{2}\Big)d\xi+$$

$$+\lambda\Big(\frac{kl}{a},l\Big)-\lambda(t,(k+1)l-at)\Bigg),\quad i=1,2,\quad t\in[kl/a,(k+1)l/a],$$

где коэффициенты $\delta_i^{(k)}$, $\sigma_i^{(k)}$, $i=\overline{0,2}$ *выражаются линейным образом через* $\delta_i^{(k-1)}$, $\sigma_i^{(k-1)}$, $i=\overline{0,2}$, $k=1,2,\ldots$, *а под выражением* $(\cdot)^\pm$ *понимаются предельные значения функции* $u(t,x)$ *и ее производных с разных сторон характеристик* $x-at=-kl$, $x+at=(k+1)l$, *а именно*

$$(\partial_x^p u)^\pm(t,x=at-kl)=\lim_{\Delta x\to+0}\partial_x^p u(t,x\pm\Delta x=at-kl),$$

$$(\partial_x^p u)^\pm(t,x=(k+1)l-at)=\lim_{\Delta x\to+0}\partial_x^p u(t,x\pm\Delta x=(k+1)l-at),\quad p=\overline{0,2},$$

является единственным классическим решением задачи (1)–(3) в области $\tilde{Q}$ *тогда и только тогда, когда выполнены неоднородные условия согласования*

$$\mu^{(0)}(0)-\varphi(0)=\sigma_0^{(0)},\quad \mu^{(l)}(0)-\varphi(l)=\delta_0^{(0)},$$

$$-\frac{1}{a}d\mu^{(0)}(0)+\frac{1}{a}\psi(0)=\sigma_1^{(0)},\quad \frac{1}{a}d\mu^{(l)}(0)-\frac{1}{a}\psi(l)=\delta_1^{(0)},$$

$$\frac{1}{a^2}d^2\mu^{(0)}(0)-d^2\varphi(0)-\frac{1}{a^2}(\lambda(0,0)\varphi(0)+f(0,0))=\sigma_2^{(0)},$$

$$\frac{1}{a^2}d^2\mu^{(l)}(0)-d^2\varphi(l)-\frac{1}{a^2}(\lambda(0,l)\varphi(l)+f(0,l))=\delta_2^{(0)}.$$

Литература

1. Корзюк В.И. Столярчук И.И. *Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна — Гордона — Фока с нелокальными условиями* // Докл. НАН Беларуси. 2017. Т. 61. № 6. С. 20–27.

2. Корзюк В.И., Козловская И.С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций. В 10 ч. Ч. 2.* Мн.: БГУ, 2017.

3. Корзюк В.И. Столярчук И.И. *Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна — Гордона — Фока в полуполосе* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1108–1117.

4. Корзюк В.И. Столярчук И.И. *Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна — Гордона — Фока в криволинейной полуполосе* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58. № 3. С. 9–15.

5. Корзюк В.И. Столярчук И.И. *Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 77–88.

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С D_e-ОПЕРАТОРОМ И ПОСТОЯННОЙ НА ДИАГОНАЛИ МАТРИЦЕЙ

А.А. Кульжумиева, Ж.А. Сартабанов

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$D_e x = A(\sigma)x + f(\tau,t,\sigma) \tag{1}$$

с оператором дифференцирования $D_e = \partial/\partial\tau + \langle e, \partial/\partial t\rangle$ по направлению главной диагонали $t = e\tau$ пространства переменных $\tau \in (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$, $t = (t_1,\ldots,t_m) \in \mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^m$, где $e = (1,\ldots,1)$ — m-вектор, $\langle e, \partial/\partial t\rangle$ — скалярное произведение векторов e и $\partial/\partial t = (\partial/\partial t_1,\ldots,\partial/\partial t_m)$; $A(\sigma)$ — n-матрица вектор переменной $\sigma = t - e\tau$, удовлетворяющая условию ω-периодичности и гладкости порядка e по $\sigma \in \mathbb{R}^m$:

$$A(\sigma + q\omega) = A(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(\mathbb{R}^m), \quad q \in \mathbb{Z}^m, \tag{2}$$

$q\omega = (q_1\omega_1,\ldots,q_m\omega_m)$, $q = (q_1,\ldots,q_m)$ — целочисленный вектор изменяющийся в $\mathbb{Z}^m$, $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_m)$ — вектор-период с положительными постоянными компонентами; $f(\tau,t,\sigma)$ — n-вектор-функция, обладающая свойством

$$f(\tau+\theta, t+q\omega, \sigma+p\omega) = f(\tau,t,\sigma) \in C_{\tau,t,\sigma}^{(0,e,e)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m), \quad p,q \in \mathbb{Z}^m, \tag{3}$$

θ — const>0, θ, $\omega_1,\ldots,$ ω_m — рационально несоизмеримые.

Исследуется задача о существовании (θ,ω,ω)-периодических решений системы (1) по $(\tau,t,\sigma) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$.

При интегрировании системы (1) переменный вектор $\sigma = t - e\tau$ ведет себя как параметр. В связи с этим для собственных значений $\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1,n}$ матрицы $A(\sigma)$ предположим выполненными следующие условия.

1°. Непрерывной дифференцируемости: $\lambda_j(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(\mathbb{R}^m)$, $j = \overline{1,n}$.

2°. Периодичности: $\lambda_j(\sigma + k\omega) = \lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1,n}$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{Z}^m$.

3°. Знакоопределенности: $\lambda_j(\sigma)$, $\forall\sigma \in \mathbb{R}^m$ для каждого $j = \overline{1,n}$: а) либо $\lambda_j(\sigma) < 0$; б) либо $\lambda_j(\sigma) = 0$; в) либо $\lambda_j(\sigma) > 0$.

4°. Разделенности: а) либо $\lambda_j(\sigma) \neq \lambda_l(\sigma)$, для всех $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $j \neq l$; б) либо $\lambda_j(\sigma) = \lambda_l(\sigma)$, для всех $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $j \neq l$, т.е. при каждом значении j собственное значение $\lambda_j(\sigma)$ имеет постоянную для всех $\sigma \in \mathbb{R}^m$ кратность $k_j = \text{const}$.

5°. Каждое из множеств $\{\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)\}$ и $\{\operatorname{Im}\lambda_j(\sigma)\}$ обладает свойствами 1°–4°.

При этих условиях в [1] доказана теорема о приводимости однородной системы

$$D_e x = A(\sigma)x \tag{4}$$

к системе

$$D_e y = J(\sigma)y \tag{5}$$

с жордановой матрицей $J(\sigma) = \operatorname{diag}[J_1(\sigma), \ldots, J_r(\sigma)]$ с жордановыми клетками

$$J_j(\sigma + q\omega) = J_j(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(\mathbb{R}^m), \quad j = \overline{1, r}, \quad q \in \mathbb{Z}^m \tag{6}$$

на основе неособенной линейной замены

$$x = L(\sigma)y, \quad \det L(\sigma) \neq 0, \quad L(\sigma + q\omega) = L(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(\mathbb{R}^m), \quad q \in \mathbb{Z}^m. \tag{7}$$

Тогда структура решений системы (4), следовательно, системы (1) аналогична структуре решений в случае постоянных коэффициентов, но спектр матрицы $A(\sigma)$ зависит от $\sigma = t - e\tau \in \mathbb{R}^m$ и многопериодичен с периодом ω.

Очевидно, что однородная система (4) в силу (2) и (5)–(7) допускает периодическое по τ решение, если среди собственных значений $\lambda_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma) + i\beta_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, имеются значения с действительными частями равными нулю, причем период ω_0 является ω-периодической переменной σ: $\omega_0(\sigma + q\omega) = \omega_0(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(\mathbb{R}^m)$, $q \in \mathbb{Z}^m$.

Если спектр матрицы $A(\sigma)$ не содержит таковых собственных значений:

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) = \alpha_j(\sigma) \neq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^m, \quad j = \overline{1, n}, \tag{8}$$

то система (4) не имеет многопериодических решений, кроме тривиального.

Следовательно, система (1) при условиях (2), (3), $1^\circ - 5^\circ$ и (8) имеет единственное (θ, ω, ω)-периодическое решение $x^*(\tau, t, \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s, \tau, \sigma) f(s, t - e\tau + es, \sigma)\, ds$, где $G(s, \tau, \sigma)$ — матрица Грина поставленной задачи.

Заметим, что это утверждение можно распространить на квазилинейный случай.

Литература

1. Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. *Reduction of linear homogeneous D_e-systems to the jordan canonical form* // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2017. № 5 (315). С. 5–12.

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Ф.Е. Ломовцев

Без продолжений исходных данных модификацией метода характеристик (распространяющихся волн) во множестве классических решений изучена корректность смешанной задачи

$$(\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)\hat{u}(x,t) = \hat{f}(x,t), \quad \{x,t\} \in G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[, \tag{1}$$

$$\hat{u}|_{t=0} = \widehat{\varphi}(x), \quad \partial_t \hat{u}|_{t=0} = \widehat{\psi}(x), \quad x \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\hat{u}|_{x=0} = \hat{\mu}(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

Здесь символы $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$ — частные производные, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ — скорости прямой волны и обратной волны и функции $\hat{f}$, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$, $\hat{\mu}$ — исходные данные задачи.

Пусть $C^k(\Omega)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω, $C(\Omega)$ – множество непрерывных функций на $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2$ — плоскость переменных x и t.

Для изучения корректности (по Адамару: существование, единственность и устойчивость по исходным данным задачи) первой смешанной задачи в классических решениях $\hat{u} \in C^2(G_\infty)$ используются частные классические решения неоднородного уравнения (1):

$$\widehat{F}_0(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} \hat{f}(s,\tau)\,ds\,d\tau, \quad t_i(x) = \frac{a_1+a_i}{a_1+a_2}\left(t - \frac{x}{a_1}\right),$$

$$\widehat{F}_i(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\Bigg[\int\limits_0^{t_i(x)} \int\limits_{a_i(t-x/a_1)-a_2\tau}^{x+a_2(t-\tau)} \hat{f}(s,\tau)\,ds\,d\tau + \int\limits_{t_i(x)}^{t} \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} \hat{f}(s,\tau)\,ds\,d\tau\Bigg], \quad i=1,2,$$

обладающие минимальной гладкостью правой части $\hat{f}$ на G_+, т.е. над критической характеристикой $x = a_1 t$ уравнения (1). Решения $\widehat{F}_1$ и $\widehat{F}_2$ на G_+ вычислены в [1] с помощью корректирующей задачи Гурса из пробного решения вида $\widehat{F}_0$ с модулем $|s|$ вместо s под интегралом.

Теорема 1. *Первая смешанная задача* (1) – (3) *в области*

$$G_- = \{\{x,t\} \in G_\infty : x > a_1 t, \quad t > 0\}$$

имеет единственное устойчивое по $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \hat{f}$ *классическое решение*

$$\hat{u}_-(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\widehat{\varphi}(x+a_2t) + a_2\widehat{\varphi}(x-a_1t) + \int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}\widehat{\psi}(\alpha)d\alpha\right] + \widehat{F}_0(x,t), \quad \{x,t\} \in G_-, \tag{4}$$

тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости

$$\widehat{\varphi} \in C^2[0,\infty[, \quad \widehat{\psi} \in C^1[0,\infty[, \quad \hat{f} \in C(G_-),$$

$$\int\limits_0^t \hat{f}(x+(-1)^p a_p(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_-), \quad p=1,2. \tag{5}$$

Если коэффициенты $(-1)^i(a_2-a_1) \geqslant 0$, *то на множестве*

$$G_+ = \{\{x,t\} \in G_\infty : x \leqslant a_1 t, \quad x \geqslant 0\}$$

первая смешанная задача (1) – (3) *имеет единственное устойчивое по* $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \hat{\mu}, \hat{f}$ *классическое решение*

$$\hat{u}_+^{(i)}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\widehat{\varphi}(a_2t+x) - a_1\widehat{\varphi}\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right) + \int\limits_{a_2(t-x/a_1)}^{a_2t+x}\widehat{\psi}(\alpha)\,d\alpha\right] +$$

$$+\hat{\mu}\left(t-\frac{x}{a_1}\right)+\widehat{F}_i(x,t)-\widehat{F}_i\left(0,t-\frac{x}{a_1}\right),\quad \{x,t\}\in G_+, \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда верны требования гладкости

$$\widehat{\varphi}\in C^2[0,\infty[,\quad \widehat{\psi}\in C^1[0,\infty[,\quad \hat{\mu}\in C^2[0,\infty[,\quad \hat{f}\in C(G_\infty),$$

$$\int\limits_0^t \hat{f}(x+a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\in C^1(G_+), \tag{7}$$

$$a_i\int\limits_0^{t_i(x)}\hat{f}\left(a_i\left(t-\frac{x}{a_1}\right)-a_2\tau,\tau\right)d\tau-a_1\int\limits_{t_i(x)}^{t}\hat{f}(x-a_1(t-\tau),\tau)\,d\tau\in C^1(G_+),\quad i=1,2, \tag{8}$$

и три условия согласования

$$\widehat{\varphi}(0)=\hat{\mu}(0),\quad \widehat{\psi}(0)=\hat{\mu}'(0),\quad \hat{f}(0,0)+(a_2-a_1)\widehat{\psi}'(0)+a_1a_2\widehat{\varphi}''(0)=\hat{\mu}''(0). \tag{9}$$

Следствие 1. *Если правая часть* $\hat{f}$ *уравнения* (1) *зависит только от* x *или* t, *то утверждение теоремы 1 верно без интегральных требований гладкости в* (5), (7), (8).

Замечание 1. В теореме 1 функции $\hat{u}_+^{(1)}$ и $\hat{u}_+^{(2)}$ являются двумя представлениями одного и того же классического решения $\hat{u}\in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (1)–(3) на G_+, так как видно, что $\hat{u}_+^{(1)}=\hat{u}_+^{(2)}$ на G_+. Можно доказать, что в требованиях гладкости (5), (7), (8) на $\hat{f}$ принадлежности интегралов соответственно множеству $C^1(G_-)$ и $C^1(G_+)$ эквивалентны их принадлежности соответствующим множествам $C^{(0,1)}(G_-)$ или $C^{(1,0)}(G_-)$ и $C^{(0,1)}(G_+)$ или $C^{(1,0)}(G_+)$ (см. замечание 2.1 в диссертации [2]). Здесь $C^{(0,1)}(\Omega)$ $(C^{(1,0)}(\Omega))$ — множество всех непрерывных (непрерывно дифференцируемых) по x и непрерывно дифференцируемых (непрерывных) по t функций на подмножестве $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. В случае $a_1=a_2=a>0$ формула (4) совпадает с известной формулой Даламбера (Эйлера) [3], а решение (6) и условия (7)–(9) — с решением и условиями корректности первой смешанной задачи в замечании 2.4 из работы [2].

Замечание 2. Глобальность теоремы 1 понимается в буквальном смысле, как самая общая теорема с наиболее слабыми предположениями на исходные данные (правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное) первой смешанной задачи (1)–(3). Теорема существования глобальных (общих) теорем для смешанных задач доказана в работе [4]. Глобальность обеспечивается тем, что исходные данные задачи не продолжаются вне множеств их исконного задания и достаточные предположения на эти данные совпадают с необходимыми (минимально возможными) предположениями, гарантирующими ее однозначную и устойчивую везде разрешимость. Теоремы, полученные продолжением всех или части исходных данных смешанных задач, представляют собой *локальные* (частные) теоремы в смысле работы [4], потому что они содержат лишь достаточные условия существования их классических решений.

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. *Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части* // Журн. Беларус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.

2. Новиков Е.Н. *Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными.* Дис. … канд. физ.-мат. наук. Минск, 2017.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 2004.

4. Ломовцев Ф.Е. О глобальных теоремах с явными решениями и условиями корректности начально-краевых задач для уравнения колебаний ограниченной струны // Материалы междунар. конф. «ВЗМШ С.Г. Крейна–2016». (Воронеж, 25 янв.–31 янв. 2016 г.). Воронеж, 2016. С. 276–279.

РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

В.В. Лысенко, Ф.Е. Ломовцев

Решена и исследована однозначная устойчивая везде разрешимость смешанной задачи для уравнения с непрерывной правой частью, зависящей только от переменной x или t:

$$(\partial_t - a_2\partial_x + b_2)(\partial_t + a_1\partial_x + b_1)u(x,t) = \breve{f}(x \vee t), \quad (x,t) \in G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geqslant 0, \tag{2}$$

$$[\Gamma(t)u]|_{x=0} \equiv [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1, b_2 \in]-\infty, +\infty[$ и $\breve{f}(x \vee t) = f(x)$ или $\breve{f}(x \vee t) = f(t)$.

Первая четверть плоскости G_∞ делится критической характеристикой $x = a_1 t$ на два множества $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > a_1 t, \ t > 0\}$ и $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : x \leqslant a_1 t, \ x \geqslant 0\}$. Пусть $C^k(\Omega)$ — множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на Ω, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma \in C[0,\infty[$, $a_1^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t) \neq 0$, $t \in [0,\infty[$, *и существует решение* $v \in C^2[0,\infty[$, $v(\rho) \neq 0$, $v'(\rho) \neq 0$, $\rho \in [0,\infty[$, *уравнения*

$$[a_1^2\zeta(\rho/a_1) - a_1\xi(\rho/a_1) + \theta(\rho/a_1)]v''(\rho) + [-2a_1b_1\zeta(\rho/a_1) + b_1\xi(\rho/a_1) +$$

$$+ a_1\alpha(\rho/a_1) - \beta(\rho/a_1)]v'(\rho) + b_1^2\zeta(\rho/a_1) - b_1\alpha(\rho/a_1) + \gamma(\rho/a_1)]v(\rho) = 0. \tag{4}$$

Задача (1) – (3) *в* G_- *имеет единственное устойчивое по* $\varphi, \psi, \breve{f}$ *классическое решение*

$$u_-(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\Bigg\{a_1 e^{-b_2 t}\varphi(x + a_2 t) + a_2 e^{-b_1 t}\varphi(x - a_1 t) +$$

$$+ \int\limits_{x-a_1 t}^{x+a_2 t} e^{B(x-s)-At}\,[A\varphi(s) + \psi(s)]\,ds + \int\limits_0^t e^{A(\tau - t)} \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{B(x-s)}\breve{f}(s \vee \tau)\,ds\,d\tau\Bigg\} \tag{5}$$

тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости

$$\varphi \in C^2[0,\infty[, \quad \psi \in C^1[0,\infty[, \quad \breve{f} \in C[0,\infty[. \tag{6}$$

Если $(-1)^i(a_2-a_1)\geqslant 0$, *то задача* (1)–(3) *на* G_+ *имеет единственное устойчивое решение*

$$u_+^{(i)}(x,t)=e^{-b_2t}\Phi(x,t)+e^{-b_1t}v(a_1t-x)\Bigg\{\int\limits_0^{t-x/a_1}\frac{1}{v^2(a_1\varrho)}\int\limits_0^{\varrho}\frac{a_1^2e^{b_1\tau}\chi(\varrho,\tau)v(a_1\tau)P_i(\tau)}{a_1^2\zeta(\tau)-a_1\xi(\tau)+\theta(\tau)}\,d\tau\,d\varrho+$$

$$+\frac{a_1v(0)[b_2\varphi(0)+\psi(0)-a_2\varphi'(0)]}{a_1+a_2}\int\limits_0^{t-x/a_1}\frac{\chi(s,0)}{v^2(a_1s)}\,ds\Bigg\}+F_i(x,t),\quad i=1,2,$$

тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (6), $\mu\in C[0,\infty[$ *и условие согласования граничного режима* (3) *с начальными условиями* (2) *и уравнением* (1) :

$$\zeta(0)[\breve f(0\vee 0)+(a_2-a_1)\psi'(0)+a_1a_2\varphi''(0)-(b_1+b_2)\psi(0)+(a_2b_1-a_1b_2)\varphi'(0)-b_1b_2\varphi(0)]+$$

$$+\xi(0)\psi'(0)+\theta(0)\varphi''(0)+\alpha(0)\psi(0)+\beta(0)\varphi'(0)+\gamma(0)\varphi(0)=\mu(0).$$

Здесь постоянные $A=(a_1b_2+a_2b_1)/(a_1+a_2), B=(b_2-b_1)/(a_1+a_2)$ и функции

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Bigg\{a_1\varphi(x+a_2t)+a_2e^{B(x+a_2t)}\varphi(0)+\int\limits_0^{x+a_2t}e^{B(x+a_2t-s)}[A\varphi(s)+\psi(s)]\,ds\Bigg\},$$

$$F_i(x,t)=\frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2}\Bigg[\int\limits_0^{t_i(x)}\int\limits_{a_it_2(x)-a_2\tau}^{x+a_2(t-\tau)}e^{A\tau-Bs}\breve f(s\vee\tau)\,ds'md\tau+\int\limits_{t_i(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}e^{A\tau-Bs}\breve f(s\vee\tau)\,ds\,d\tau\Bigg],$$

$$P_i(t)=\mu(t)-[\Gamma(t)(e^{-b_2t}\Phi(x,t)+F_i(x,t))]|_{x=0},\quad t_i(x)=\frac{a_1+a_i}{a_1+a_2}\Big(t-\frac{x}{a_1}\Big),$$

$$\chi(a,b)=\exp\Bigg\{-a_1\int\limits_a^b\sigma(s)\,ds\Bigg\},\quad \sigma(t)=\frac{2a_1b_1\zeta(t)-b_1\xi(t)-a_1\alpha(t)+\beta(t)}{a_1^2\zeta(t)-a_1\xi(t)+\theta(t)}.$$

Замечание. В уравнении (1) два дифференциальных множителя коммутируют и уже даже поэтому решения $u_+^{(1)}=u_+^{(2)}$ на G_+. Когда коэффициенты в условии (3) не зависят от t, тогда обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (4) с постоянными коэффициентами всегда имеет частное решение в виде экспоненты $v(\rho)=e^{\lambda\rho}\in C^2[0,\infty[$, которое удовлетворяет свойствам: $v(\rho)\neq 0$, $v'(\rho)\neq 0$, $\rho\in[0,\infty[$, из теоремы 1, и не только в случае простых вещественных характеристических корней $\lambda\neq 0$ уравнения (4). Когда коэффициенты условия (3) зависят от t, тогда для некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений (4) существуют известные функции Чебышева — Эрмита и Чебышева-Лагерра [1], которые также удовлетворяют этим свойствам. В случае $a_1=a_2=a>0$, $b_1=b_2=0$ формула (5) совпадает с известной формулой Даламбера (Эйлера) [1], а требования гладкости (6) — с требованиями гладкости из замечания 2.1 в [2] для правой части уравнения (1), зависящей от x или t. Частные решения F_1 и F_2 неоднородного уравнения (1) взяты из [3]. В частном случае $\zeta=\xi=0$ однозначная и устойчивая везде разрешимость задачи (1)–(3) изучена в [4].

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 2004.
2. Новиков Е.Н. *Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 2017.
3. Ломовцев Ф.Е. *Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части* // Журн. Беларус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.
4. Ломовцев Ф.Е., Шоломицкая В.В. *Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарной первой косой производной и второй производной по x в граничном условии* // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2016. № 2. С. 95–102.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО МНОГОМЕРНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

А.М. Нигмедзянова

Пусть E_n^+ — полупространство $x_n > 0$ n-мерного евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, D — конечная область в E_n^+, ограниченная открытой частью Γ_0 гиперплоскости $x_n = 0$ и гиперповерхностью Γ.

Рассмотрим многомерное вырождающееся B-эллиптическое уравнение первого рода вида:

$$L_B[u(x)] = x_n^m\left(\Delta_{x_p} u + \sum_{j=p+1}^{n-1} B_{x_j} u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_{x_p} = \sum_{i=1}^{p} \partial^2/\partial x_i^2$, $B_{x_j} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \dfrac{k_j}{x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ — оператор Бесселя, $m > 0$, $k_j > 0$ — постоянные числа, $n \geqslant 3$.

Термин « B-эллиптическое уравнение» был введен И.А. Киприяновым и означает уравнение эллиптического типа, в котором по одной или нескольким переменным действует оператор Бесселя

$$B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad k > 0.$$

Необходимость исследования вырождающихся B-эллиптических уравнений обусловлена их многочисленными приложениями. Имеется значительное число работ, посвященных исследованию задач для более простых вырождающихся эллиптических уравнений первого рода (см, например, [1–4]).

В работе найдено фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{E}_n^+$:

$$\mathcal{E}(x; x_0) = aC_k \frac{\Gamma(2-2\beta)\sum_{j=p+1}^{n-1}\Gamma(k_j/2)\Gamma((p-2)/2)(m+2)^{2\beta}}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma/2-\beta)2^{4\beta+1}}(x_p x_{p0})^{-m/4} \times$$

$$\times \prod_{j=n-p}^{n-1}(x_j x_{j,0})^{-k_j/2}\rho_{xx_0}^{2-p} + \mathcal{E}^*(x; x_0),$$

где

$$C_k^{-1}=\prod_{j=p+1}^{n-1}\left(\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k_j}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{k_j+1}{2}\right)\right),\quad \beta=\frac{m}{2(m+2)},\quad \gamma=p+\sum_{j=n-p}^{n-1}k_j,$$

$$\rho^2_{xx_0}=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i0})^2+\frac{4}{(m+2)^2}(x_n^{(m+2)/2}-x_{n0}^{(m+2)/2})^2,$$

$\mathcal{E}^*(x;x_0)$ — регулярная в точке x_0 функция.

Очевидно, что фундаментальное решение уравнения (1) обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{E}(\xi;x)=o(1)\quad\text{при}\quad x_p\to 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}(\xi;x)}{\partial x_p}=o(1)\quad\text{при}\quad \xi_p\to 0,\qquad \frac{\partial\mathcal{E}(\xi;x)}{\partial x_p}=O(1)\quad\text{при}\quad x_p\to 0,$$

$$\mathcal{E}(x;x_0)=O((\rho^2_{xx_0})^{-(\gamma-2)/2-(m+4)/(2m+4)})\quad\text{при}\quad |x|\to\infty,$$

$$A[\mathcal{E}(x;x_0)]=O((\rho^2_{xx_0})^{-\gamma/2-(m+4)/(2m+4)})\quad\text{при}\quad |x|\to\infty,$$

где $A[\cdot]=\xi_n^m\sum_{i=1}^{n-1}\cos(\mathrm{n},\xi_i)\frac{\partial}{\partial\xi_i}+\cos(\mathrm{n},\xi_n)\frac{\partial}{\partial\xi_n}$ — конормальная производная, n — внешняя нормаль к границе Γ.

Литература

1. Смирнов М.М. *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения* М.: Наука, 1966.
2. Нигмедзянова А.М. *Исследование краевых задач* $\mathbf{N}$ *для одного многомерного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода методом потенциалов* // Вестн. Татарского гос гуманитарно-педагогического ун-та. Математика. 2008. № 9. С. 17–20.
3. Нигмедзянова А.М. *Исследование краевых задач* N *для одного вырождающегося эллиптического уравнения первого рода методом интегральных уравнений* // Тр. Российской школы «Математическое моделирование в системах компьютерной математики» и Российского семинара «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии». Казань; Яльчик, 2010. С. 66–72.
4. Чеботарева Э.В. *Решение краевых задач для многомерного вырождающегося В-эллиптического уравнения первого рода* // Филология и культура. 2007. № 9–10. С. 9–14.

МНОЖЕСТВО РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.И. Никитин

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы полулинейных параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями:

$$\begin{aligned}
&u_t=\triangle u+c_1(x,t)v^p,\quad v_t=\triangle v+c_2(x,t)u^q, && x\in\Omega,\quad t>0,\\
&\frac{\partial u}{\partial\nu}=\int_\Omega k_1(x,y,t)u^m(y,t)\,dy, && x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\
&\frac{\partial v}{\partial\nu}=\int_\Omega k_2(x,y,t)v^n(y,t)\,dy, && x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\
&u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x), && x\in\Omega,
\end{aligned}\tag{1}$$

где p,q,m,n — положительные постоянные, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant 1)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, ν — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Будем предполагать, что для задачи (1) выполнено следующее:

$$c_i(x,t) \in C^{\alpha}_{\text{loc}}(\overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad 0 < \alpha < 1, \quad c_i(x,t) \geqslant 0, \quad i = 1,2;$$

$$k_i(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,+\infty)), \quad k_i(x,y,t) \geqslant 0, \quad i = 1,2;$$

$$u_0(x), v_0(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad v_0(x) \geqslant 0 \ \text{ в } \ \Omega;$$

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k_1(x,y,t) u_0^m(y)\, dy, \quad \frac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k_2(x,y,t) v_0^n(y)\, dy \ \text{ на } \ \partial\Omega.$$

Определение. Точку $x_0 \in \overline{\Omega}$ будем называть точкой разрушения решения (u,v) задачи (1) в $\Omega \times (0,T^*)$, если существует последовательность $\{(x_n,t_n)\}$, $x_n \in \Omega$, $t_n < T^*$, $(x_n,t_n) \to (x_0,T^*)$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (u(x_n,t_n) + v(x_n,t_n)) = \infty$. Множество разрушения решения есть множество всех точек разрушения.

Введем обозначения:

$$J_1(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} u^m(x,\tau)\, dx\, d\tau, \quad J_2(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} v^n(x,\tau)\, dx\, d\tau.$$

Лемма. *Пусть решение* $(u(x,t), v(x,t))$ *задачи* (1) *разрушается при* $t = T$. *Тогда если* $m > 1$ *и* $\inf\limits_{\partial\Omega \times Q_T} k_1(x,y,t) > 0$, *то для* $t \in [0,T)$

$$J_1(t) \leqslant s_1 (T-t)^{-1/(m-1)}, \quad s_1 > 0,$$

или если $n > 1$ *и* $inf_{\partial\Omega \times Q_T} k_2(x,y,t) > 0$, *то для* $t \in [0,T)$

$$J_2(t) \leqslant s_2 (T-t)^{-1/(n-1)}, \quad s_2 > 0.$$

Теорема. *Пусть* $p, q \leqslant 1, m, n > 1$ *и выполнены условия Леммы. Тогда решение задачи* (1) *разрушается только на границе* $\partial\Omega$.

Литература

1. Гладков А.Л., Никитин А.И. *О глобальном существовании решений начально-краевой задачи для системы полулинейный параболических уравнений с нелинейными нелокальными граничными условиями Неймана* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 88–107.

2. Gladkov A., Kavitova T. *Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition* // Applicable Analysis. 2016. V. 95. № 9. P. 1974–1988.

УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ МОДЕЛИ

Я.А. Окрут, А.С. Федотов

Рассмотрим двухтемпературную модель, описывающую перенос энергии на малых временных масштабах, применяюмую для расчета тепловых полей при нагреве металлов фемтосекунднными лазерными импульсами. При низких мощностях импульсов двухтемпературная модель имеет прикладное значение для расчета оптоакустических и оптоакустоплазмонных задач, а характеристики среды можно считать не зависящими от температуры.

Сформулируем начально-краевую задачу для системы из двух уравнений теплопроводности:

$$C_{\mathrm{e}}\,\rho_{\mathrm{e}}\,\frac{\partial T_{\mathrm{e}}}{\partial t} = \lambda_{T_{\mathrm{e}}}\triangle T_{\mathrm{e}} + Q_s - \gamma\,(T_{\mathrm{e}} - T_{\mathrm{i}})\,, \qquad (1)$$

$$C_{\mathrm{i}}\,\rho_{\mathrm{i}}\,\frac{\partial T_{\mathrm{i}}}{\partial t} = \lambda_{T_{\mathrm{i}}}\triangle T_{\mathrm{i}} + \gamma\,(T_{\mathrm{e}} - T_{\mathrm{i}}) \qquad (2),$$

где параметры системы ρ_{e}, ρ_{i}, $\lambda_{T_{\mathrm{e}}}$, $\lambda_{T_{\mathrm{i}}}$, C_{i}, C_{e} постоянны и соответствуют теплофизическим характеристикам электронной (индекс «e») и фононной (индекс «i») подсистем. В простейшем случае при отсутствие значительной термоэмиссии и фазового перехода, на краях расчетной области ставятся условия Дирихле, соответствующие постоянной (начальной) температуре. Начальные условий для полей T_{e}, T_{i} принимаются одинаковыми в каждой точке расчетной области. Источник Q_s записывается для импульса гауссовой формы по пространственным координатам и затухающего по экспоненте с характерным временем τ_p.

Исследование системы (1), (2) осуществлялось с помощью вычислительного эксперимента. Уравнения (1) решались методом конечных разностей, с использование итерационного процесса для согласования связанных уравнений для полей T_{e}, T_{i}. Дополнительная верификация проводилась коммерческим пакетом конечно-элементного моделирования COMSOL Multiphysics. Расчет проводился для одномерного случая, в пространственной области длиной 100 нм при дистанции проникновения теплового импульса около 20 нм до видимой диссипации.

Установлено наличие расхождения между максимальными значениями T_{e}, T_{i}, полученными с использованием схем Кранка — Николсона, Дюфорта — Франкеля и метода конечных элементов при критерии Куранта $C \ll 1$. Расчеты, полученные с использованием схемы Дюфорта — Франкеля, показывают хорошее совпадение с результатами конечно-элементного моделирования (рисунок): $T_{\mathrm{emax}} = 300.09$ K, среднеквадратичное отклонение менее $0.03\,\%$. Расчет с использованием схемы Кранка — Николсон показал $T_{\mathrm{emax}} = 299.42$ K. Расчет с использованием схемы Кранка — Николсон демонстрировал устойчивость без значительного возрастания погрешности со временем при числах Куранта $C < 10^4$.

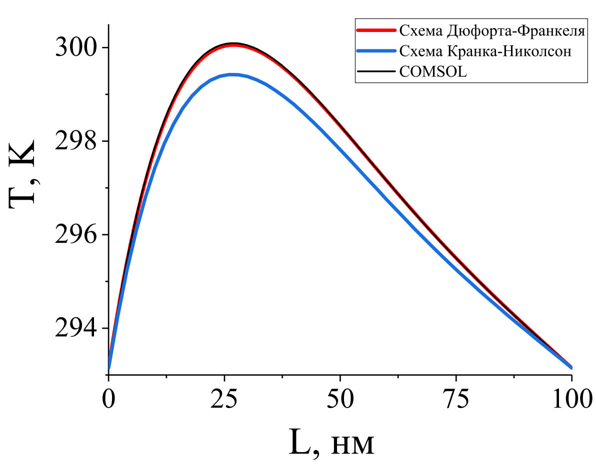


Рисунок. Пространственное распределение T_{e} в момент времени, соответствующий максимальной наблюдаемой в системе температуре.

Мы благодарим за плодотворную дискуссию и полезные советы, повлиявшие на ход исследования кафедру высшей математики и математической физики физического факультета БГУ.

Литература

1. Romanov O.G., Romanov G.S. *Thermomechanical effect of ultrashort laser pulses on single-dimension metallic nanostructures* // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. 2014. V. 78. № 12. P. 1299–1302.

2. Baum O.I., Zheltov G.I., Omelchenko A.I., Romanov G.S., Romanov O.G., Sobol O.G. *Thermomechanical effect of pulse-periodic laser radiation on cartilaginous and eye tissues* // Laser Physics, 2013. — V.23. — 085602 (10pp).

3. Fedotov A.S., Shepelevich V.G., Poznyak S.K., Saad A., Svito I.A., Mazanik A.V., Fedotov A.K. *Thermoelectric and galvanomagnetic properties of tin doped bismuth* // Proceedings of the 17th International Symposium on the Physics of Semiconductors and Applications (December 7–11, 2014, Jeju, Korea). Jeju, 2014.

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Е.Ю. Панов

В полупространстве $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = \Delta_x g(u), \tag{1}$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и неубывающая функция диффузии $g(u) \in C(\mathbb{R})$ лишь непрерывны. Так как функция $g(u)$ может быть постоянной на нетривиальных интервалах, уравнение (1) является вырождающимся параболическим уравнением. В частности, при $g(u) = \mathrm{const}$ оно превращается в закон сохранения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0. \tag{2}$$

Известное понятие энтропийного решения уравнения (2) в смысле Кружкова [1] было распространено на случай уравнений (1) в работе Карильо [2].

Определение. Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется энтропийным решением (коротко — э.р.) уравнения (1), если обобщенный градиент $\nabla_x g(u) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi, \mathbb{R}^n)$ и для всех $k \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$|u - k|_t + \operatorname{div}_x[\operatorname{sgn}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \Delta|g(u) - g(k)| \leqslant 0$$

в смысле распределений на Π.

Допустим также, что э.р. $u(t, x)$ является периодическим по пространственным переменным с решеткой периодов $L \subset \mathbb{R}^n$, т.е. $u(t, x) \in L^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{T}^n)$, где $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / L$ — соответствующий тор. Обозначим через dx нормированную меру Лебега на $\mathbb{T}^n$. Нетрудно установить, что величина $I = \int_{\mathbb{T}^n} u(t, x)\, dx$ не зависит от t.

Пусть L' — двойственная решетка к решетке периодов L. Предположим, что выполнено следующее условие:

$$\forall \xi \in L',\ \ \xi \neq 0,\ \text{ функции } \xi\varphi(u),\ \ g(u) \text{ одновременно}$$

$$\text{не постоянны ни в какой окрестности точки } I. \tag{3}$$

Основным результатом настоящей работы является установление следующего свойства стабилизации при больших временах.

Теорема. *Предположим, что выполнено условие* (3). *Тогда*

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to+\infty} u(t,x) = I \text{в} L^1(\mathbb{T}^n).$$

Заметим, что условие (3) является точным, при его нарушении всегда можно найти L-периодическое э.р. для которого свойство стабилизации не выполнено. Для законов сохранения (2) сформулированная теорема доказана в работе [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.445.2016/1.4) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-01-00258-а).

Литература

1. Кружков С.Н. *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными* // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.
2. Carrillo J. *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1999. V. 147. P. 269–361.
3. Panov E.Yu. *On a condition of strong precompactness and the decay of periodic entropy solutions to scalar conservation laws* // Networks and Heterogeneous Media. 2016. V. 11. № 2. P. 349–367.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЩЕГО ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ВТОРЫМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

К.А. Спесивцева, Ф.Е. Ломовцев

Решена в явном виде без продолжений исходных данных и изучена однозначная, устойчивая везде разрешимость во множестве классических решений начально-граничной задачи:

$$(\partial_t - a_2\partial_x)(\partial_t + a_1\partial_x)u(x,t) = f(x,t), \quad \{x,t\} \in G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \geqslant 0, \tag{2}$$

$$[\Gamma(t)u]|_{x=0} = [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ — вещественные постоянные и f, φ, ψ, μ, $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma$ — заданные функции указанных выше своих независимых переменных x и t.

Для единственных классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ начально-граничной задачи (1)–(3) методом характеристик выведена обобщенная формула Даламбера (Эйлера) на множестве $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > a_1 t,\ t > 0\}$, как решение задачи Коши (1), (2), и новая формула ее классических решений на множестве $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : x \leqslant a_1 t,$ $x \geqslant 0\}$, как решение задачи Пикара: уравнения (1) при граничном условии (3) и граничных условиях равенства самих решений и их частных производных первого и второго порядков на критической характеристике $x = a_1 t$. Пусть $C^k(\Omega)$ — множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Доказана следующая

Теорема. *Пусть в граничном условии* (3) *все коэффициенты непрерывно дифференцируемы:* $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta$, $\gamma \in C^1[0,\infty[$, *а вторые частные производные берутся вдоль критической характеристики уравнения (1):* $a_1^2\zeta(t) - a_1\xi(t) + \theta(t) \equiv 0$, $t \in [0,\infty[$.

Начально-граничная задача (1) – (3) *на множестве* G_- *имеет единственное устойчивое классическое решение*

$$u_-(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(x-a_1t)+\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}\psi(s)\,ds+\int\limits_0^t\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\right] \quad (4)$$

для тех и только тех $\varphi,\psi,f,$ *для которых выполняются требования гладкости*

$$\varphi\in C^2[0,\infty[,\quad \psi\in C^1[0,\infty[,\quad f\in C(G_\infty),$$

$$\int\limits_0^t f(x+(-1)^p a_p(t-\tau),\tau)\,d\tau\in C^1(G_-),\quad p=1,2. \quad (5)$$

Если $a_1\alpha(t)\neq\beta(t), t\in[0,\infty[$ *и коэффициенты* $(-1)^i(a_2-a_1)\geqslant 0,$ *то начально-граничная задача* (1) – (3) *на множестве* G_+ *имеет единственное устойчивое классическое решение*

$$u_+^{(i)}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi(x+a_2t)+a_2\varphi(0)+\int\limits_0^{x+a_2t}\psi(s)\,ds\right]+$$

$$+\int\limits_0^{a_1t-x}\exp\left(\int\limits_\rho^{a_1t-x}\frac{\gamma(\nu/a_1)\,d\nu}{a_1\alpha(\nu/a_1)-\beta(\nu/a_1)}\right)\times$$

$$\times\frac{\mu(\rho/a_1)-[\Gamma(\rho/a_1)(\Phi(a_2\rho/a_1+x)+F_i(x,\rho/a_1))]|_{x=0}}{a_1\alpha(\rho/a_1)-\beta(\rho/a_1)}\,d\rho+F_i(x,t) \quad (6)$$

для тех и только тех $\varphi,\psi,\mu,f,$ *для которых выполняются требования гладкости*

$$\varphi\in C^2[0,\infty[,\quad \psi\in C^1[0,\infty[,\quad \mu\in C^1[0,\infty[,\quad f\in C(G_\infty),$$

$$\int\limits_0^t f(x+a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\in C^1(G_+), \quad (7)$$

$$\frac{a_i}{a_1}\int\limits_0^{t_i(x)} f(a_i(t-x/a_1)-a_2\tau,\tau)\,d\tau-\int\limits_{t_i(x)}^t f(x-a_1(t-\tau),\tau)\,d\tau\in C^1(G_+),\quad i=1,2,$$

$$\zeta(t)\varphi'''(a_2t),\xi(t)\varphi'''(a_2t),\zeta(t)\psi''(a_2t),\xi(t)\psi''(a_2t)\in C[0,\infty[,$$

$$a_2\xi(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\limits_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\right)+\theta(t)\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{a_1-a_2}{a_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\right)-f(0,t)\right\}\in C[0,\infty[$$

и два условия согласования граничного условия с начальными условиями и уравнением:

$$\zeta(0)[f(0,0)+(a_2-a_1)\psi'(0)+a_1a_2\varphi''(0)]+\xi(0)\psi'(0)+\theta(0)\varphi''(0)+\alpha(0)\psi(0)+$$

$$+\alpha(0)\psi(0)+\beta(0)\varphi'(0)+\gamma(0)\varphi(0)=\mu(0),$$

$$(\zeta'(0)+\alpha(0))\{f(0,0)+(a_2-a_1)\psi'(0)+a_1a_2\varphi''(0)\}+\zeta(0)\{(a_2-a_1)[(a_2-a_1)\psi''(0)+$$
$$+a_1a_2\varphi'''(0)]+a_1a_2\psi''(0)\}+(\xi'(0)+\beta(0))\psi'(0)+\xi(0)[(a_2-a_1)\psi''(0)+a_1a_2\varphi'''(0)]+$$
$$+\theta'(0)\varphi''(0)+\theta(0)\psi''(0)+[\alpha'(0)+\gamma(0)]\psi(0)+\beta'(0)\varphi'(0)+\gamma'(0)\varphi(0)+$$
$$+\zeta(0)[f'_t(0,0)+(a_2-a_1)f'_x(0,0)]+\xi(0)f'_x(0,0)=\mu'(0).$$

В этой теореме используются следующие обозначения:

$$\Phi(y)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi(y)+a_2\varphi(0)+\int\limits_0^y\psi(s)ds\right],\quad t_i(x)=\frac{a_1+a_i}{a_1+a_2}\left(t-\frac{x}{a_1}\right),$$

$$F_i(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left[\int\limits_0^{t_i(x)}\int\limits_{a_it-(a_i/a_1)x-a_2\tau}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau+\int\limits_{t_i(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\right],\quad i=1,2.$$

Следствие. *Если правая часть f уравнения* (1) *зависит только от x или t, то утверждение этой теоремы верно без интегральных требования гладкости из* (5) *и* (7) *на f.*

Замечание. Формула (4) при $a_1=a_2$ является известной формулой Даламбера (Эйлера) решения задачи Коши [1]. Можно доказать, что в формуле (6) решения $u_+^{(1)}=u_+^{(2)}$ на G_+. Классические решения F_1,F_2 неоднородного уравнения колебаний струны (1) с минимальными требованиями гладкости из (7) на правую часть f уравнения (1) имеются в [2]. В интегральных требованиях гладкости (5) и (7) принадлежность интегралов для непрерывной функции f на G_- и G_∞ соответственно множествам $C^1(G_-)$ и $C^1(G_+)$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{0,1}(G_-)$ и $C^{0,1}(G_+)$ или $C^{1,0}(G_-)$ и $C^{1,0}(G_+)$, где соответственно $C^{0,1}(\Omega)$ и $C^{1,0}(\Omega)$ — множества непрерывных по x и t и непрерывно дифференцируемых по t и x функций на подмножестве плоскости $\Omega\subset\mathbb{R}^2$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 2004.

2. Ломовцев Ф.Е. *Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ПЕРВЫМИ КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА КОНЦАХ

Т.С. Точко, Н.И. Юрчук, Ф.Е. Ломовцев

Без продолжений данных во множестве классических решений установлены необходимые условия для однозначной везде разрешимости линейной краевой задачи с зависящими от времени первыми косыми производными, направленными вдоль характеристик уравнения:

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad a>0,\quad Q_n=[0,d]\times[0,d_{n+1}],\tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,d], \tag{2}$$

$$[\alpha_i(t)u_t(x,t)+\beta_i(t)u_x(x,t)+\gamma_i(t)u(x,t)]|_{x=\hat{d}_i}=\mu_i(t), \quad t\in[0,d_{n+1}], \quad i=1,2, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

где α_i, β_i, γ_i — функции переменной t, $a\alpha_i(t) = (-1)^{i+1}\beta_i(t)$, $\gamma_i(t) \neq 0$, $t \in [0, d_{n+1}]$, концы струны $\hat{d}_i = (i-1)d$ и исходные данные f, φ, ψ, μ_1, μ_2 — функции своих переменных x и t.

Впервые без продолжений входных данных классическое решение и достаточные условия однозначной разрешимости краевой (смешанной) задачи для однородного простейшего уравнения колебания полуограниченной струны вида (1) с зависящей от времени характеристической первой косой производной в краевом условии были выведены в [1]. Из результатов работ [2, 3] методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны из [4] найдены обязательные требования гладкости и согласования на исходные данные.

Множество Q_n разбивается на прямоугольники $G_k = [0,d] \times [d_k, d_{k+1}]$, где $d_k = (k-1)d/(2a)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и делится характеристиками уравнения (1) на треугольники:

$$\Delta_{3k-2} = \{\{x,t\} : x > at_k, \ \ x + at_k < d, \ \ x \in]0,d[\}, \quad t_k = t - d_k,$$

$$\Delta_{3k-1} = \{\{x,t\} : x \leqslant at_k, \ \ x \in [0, d/2]\},$$

$$\Delta_{3k} = \{\{x,t\} : x + at_k \geqslant d, \ \ x \in [d/2, d]\}, \quad t \in [d_k, d_{k+1}], \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $C^k(\Omega)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема. *Пусть в граничных условиях* (3) *коэффициенты* $a\alpha_i(t) = (-1)^{i+1}\beta_i(t)$, $\gamma_i(t) \neq 0$, $t \in [0, d_{n+1}]$, $i = 1, 2$. *Если краевая задача* (1)–(3) *на множестве* Q_n *имеет единственное классическое решение* $u \in C^2(Q_n)$, *то необходимы требования гладкости*

$$\beta_i, \gamma_i \in C^{k+1}[d_k, d_{k+1}], \quad \varphi \in C^{n+1}[0,d], \quad \psi \in C^n[0,d], \quad \mu_i \in C^{k+1}[d_k, d_{k+1}],$$

$$f \in C^{k-1}(G_k), \quad \int\limits_{d_k}^{t} f(|d - |d - x \pm a(t-\tau)||, \tau)\, d\tau \in C^k(G_k),$$

$$\beta_i(t)\varphi'''(at), \beta_i(t)\psi''(at), \beta_i(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\limits_{d_k}^{t} f(a(t-\tau),\tau)d\tau\right) \in C^{k-1}[d_k, d_{k+1}],$$

где $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *и* $6n$ *условий согласования граничных* (3) *с начальными* (2) *условиями и уравнением* (1):

$$\alpha_i^{(k-1)}(0)\psi^{(k-1)}(\hat{d}_i) + \beta_i^{(k-1)}(0)\varphi^{(k)}(\hat{d}_i) + \gamma_i^{(k-1)}(0)\varphi^{(k-1)}(\hat{d}_i) = \mu_i^{(k-1)}(0),$$

$$\alpha_i^{(k-1)}(0)[a^2\varphi^{(k+1)}(\hat{d}_i) + f^{(k-1)}(\hat{d}_i, 0)] + [\alpha_i^{(k)}(0) + \gamma_i^{(k-1)}(0)]\psi^{(k-1)}(\hat{d}_i) +$$
$$+ \beta_i^{(k-1)}(0)\psi^{(k)}(\hat{d}_i) + \beta_i^{(k)}(0)\varphi^{(k)}(\hat{d}_i) + \gamma_i^{(k)}(0)\varphi^{(k-1)}(\hat{d}_i) = \mu_i^{(k)}(0),$$

$$\alpha_i^{(k+1)}(0)\psi^{(k-1)}(\hat{d}_i) + 2\alpha_i^{(k)}(0)[a^2\varphi^{(k+1)}(\hat{d}_i) + f^{(k-1)}(\hat{d}_i, 0)] +$$
$$+ \alpha_i^{(k-1)}(0)[a^2\psi^{(k+2)}(\hat{d}_i) + f_t^{(k-1)}(\hat{d}_i, 0)] + \beta_i^{(k+1)}(0)\varphi^{(k)}(\hat{d}_i) + 2\beta_i^{(k)}(0)\psi^{(k)}(\hat{d}_i) +$$

$$+\beta_i^{(k-1)}(0)[a^2\varphi^{(k+2)}(\hat{d}_i)+f_x^{(k-1)}(\hat{d}_i,0)]+\gamma_i^{(k+1)}(0)\varphi^{(k-1)}(\hat{d}_i)+2\gamma_i^{(k)}(0)\psi^{(k-1)}(\hat{d}_i)+$$

$$+\gamma_i^{(k-1)}(0)[a^2\varphi^{(k+1)}(\hat{d}_i)+f^{(k-1)}(\hat{d}_i,0)]=\mu_i^{(k+1)}(0),\quad k=1,2,\ldots,n,\quad i=1,2,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Замечание. Для частного случая $f=0$, $\alpha_1=1$, $\beta_1=a$, $\gamma_1=\gamma$, $\alpha_2=\beta_2=0$, $\gamma_2=1$, $\mu_1=\mu_2=0$ формула единственного классического решения и достаточные условия на φ и ψ краевой задачи (1)–(3) были получены в [5] с помощью кусочно-гладких справа специальных продолжений начальных данных φ и ψ с отрезка $[0,d]$ на отрезок $[-2nd,2nd]$.

Литература

1. Барановская С.Н., Юрчук Н.И. *Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.

2. Юрчук Н.И., Новиков Е.Н. *Необходимые условия для существования классических решений колебаний полуограниченной струны* // Весцi НАН Беларусi. 2016. № 4. С. 116–120.

3. Ломовцев Ф.Е. *Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии* // Весцi НАН Беларусi. 2016. № 1. С. 21–27.

4. Ломовцев Ф.Е. *Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны* // Тез. докл. VI Богдановских чтений по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Минск, 7–10 дек. 2015 г.). Мн., 2015. Ч. 2. С. 74–75.

5. Шлапакова Т.С., Юрчук Н.И. *Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике* // Вестн. БГУ. 2013. Сер. 1. № 2. С. 84–90.

КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ГРАНИЧНОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Е.В. Устилко, Ф.Е. Ломовцев

Модификацией метода характеристик полностью решена и изучена однозначная и устойчивая везде разрешимость во множестве классических решений смешанной задачи

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{xt}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad (x,t)\in G_\infty=[0,\infty)\times[0,\infty),\tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t(x,t)|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in\mathbb{R}_+=[0,\infty),\tag{2}$$

$$[\alpha(t)u_t(x,t)+\beta(t)u_x(x,t)+\gamma(t)u(x,t)]|_{x=0}=\mu(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,\tag{3}$$

где коэффициенты α, β, γ — заданные функции переменной t, исходные данные f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x, t и постоянные $a_1>0$, $a_2>0$. Частные производные соответствующих порядков от искомой функции u обозначаем нижними индексами по указанным переменным. В случае $a_1=a_2$ эта задача исследовалась в [1]. Доказана

Теорема. *Пусть в граничном условии (3) коэффициенты* α, β, $\gamma\in C^2(\mathbb{R}_+)$ *и первая косая производная является характеристической, т.е.* $a_1\alpha(t)=\beta(t)$, $\gamma(t)\neq 0$,

$t \in \mathbb{R}_+$. *Для того, чтобы смешанная задача (1)–(3) на множестве* $G_- = \{(x,t) \in \in G_\infty : x > a_1 t > 0\}$ *имела единственное устойчивое классическое решение*

$$u_-(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left[a_1\varphi(x+a_2t) + a_2\varphi(x-a_1t) + \int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t}\psi(s)\,ds + \int\limits_0^t \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau\right], \quad (4)$$

необходимо и достаточно справедливости требований гладкости

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+), \psi \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad f \in C(G_-),$$

$$\int\limits_0^t f(x+(-1)^p a_p(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_-), \quad p = 1,2. \qquad (5)$$

Если коэффициенты $(-1)^i(a_2 - a_1) \geqslant 0$, *то для того, чтобы смешанная задача* (1)–(3) *на* $G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : 0 \leqslant x \leqslant a_1 t\}$ *имела единственное устойчивое классическое решение*

$$u_+^{(i)}(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1\left[\varphi(x+a_2t) - \varphi\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right)\right] + \int\limits_{a_2(t-x/a_1)}^{x+a_2t}\psi(s)\,ds\right\} - F_i\left(0, t-\frac{x}{a_1}\right) +$$
$$+ a_1^{-1}\gamma^{-1}\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\left\{a_1\mu\left(t-\frac{x}{a_1}\right) - \beta\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\left[a_1\varphi'\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right) + \psi\left(a_2\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\right)\right] -\right.$$
$$\left. - \beta\left(t-\frac{x}{a_1}\right)\int\limits_0^{t-x/a_1} f\left(a_2(t-\tau) - \frac{a_2}{a_1}x, \tau\right)d\tau\right\} + F_i(x,t), \quad t_i(x) = \frac{a_1+a_i}{a_1+a_2}\left(t-\frac{x}{a_1}\right), \quad (6)$$

необходимо и достаточно выполнения требований гладкости

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+), \psi \in C^1(\mathbb{R}_+), \mu \in C^2(\mathbb{R}_+), f \in C(G_\infty), \int\limits_0^t f(x+a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_+), \quad (7)$$

$$a_i\int\limits_0^{t_i(x)} f\left(a_i\left(t-\frac{x}{a_1}\right) - a_2\tau, \tau\right)d\tau - a_1\int\limits_{t_i(x)}^t f(x-a_1(t-\tau),\tau)\,d\tau \in C^1(G_+), \qquad (8)$$

$$\beta(t)\varphi'''(a_2t), \beta(t)\psi''(a_2t), \beta(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int\limits_0^t f(a_2(t-\tau),\tau)\,d\tau\right) \in C(\mathbb{R}_+), \quad i = 1,2,$$

и три условия согласования

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0),$$

$$\alpha(0)[a_1a_2\varphi''(0) - (a_1-a_2)\psi'(0) + f(0,0)] +$$
$$+ \psi(0)[\alpha'(0) + \gamma(0)] + \beta'(0)\varphi'(0) + \beta(0)\psi'(0) + \varphi(0)\gamma'(0) = \mu'(0),$$
$$\alpha''(0)\psi(0) + 2\alpha'(0)[a_1a_2\varphi''(0) - (a_1-a_2)\psi'(0) + f(0,0)] +$$

$$+\alpha(0)\{a_1a_2\psi''(0)-(a_1-a_2)[a_1a_2\varphi'''(0)-(a_1-a_2)\psi''(0)]\}+\beta''(0)\varphi'(0)+$$
$$+2\beta'(0)\psi'(0)+\gamma''(0)\varphi(0)+2\gamma'(0)\psi(0)+\beta(0)[a_1a_2\varphi'''(0)-(a_1-a_2)\psi''(0)]+$$
$$+\gamma(0)[a_1a_2\varphi''(0)-(a_1-a_2)\psi'(0)+f(0,0)]+\alpha(0)[f_t(0,0)+a_2f_x(0,0)]=\mu''(0).$$

При формулировке этой теоремы нами использовались обозначения

$$F_i(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\Biggl[\int\limits_0^{t_i(x)}\int\limits_{a_it-(a_i/a_1)x-a_2\tau}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau+\int\limits_{t_i(x)}^{t}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau\Biggr],\quad i=1,2,$$

специальных классических решений неоднородного уравнения (1) из [2].

Следствие. *Если правая часть f уравнения (1) зависит только от x или t, то утверждение теоремы верно без интегральных требований гладкости на f в* (5), (7), (8).

Замечание. Единственность классического решения $u\in C^2(G_\infty)$ задачи (1)–(3) подтверждается еще и тем, что в выражении (6) функции $u_+^{(1)}=u_+^{(2)}$ на G_+. Формула классического решения (4) в G_- совпадает с обобщенной формулой типа Даламбера — Эйлера классического решения соответствующей задачи Коши из [3] при $b_1=b_2=0$. Нетрудно доказать, что для смешанной задачи (1)–(3) указанная в требованиях (5), (7) и (8) принадлежность интегралов от непрерывной функции f на G_- и G_∞ соответственно множествам $C^1(G_-)$ и $C^1(G_+)$ эквивалентна их принадлежности соответственно множествам $C^{(1,0)}(G_-)$ и $C^{(1,0)}(G_+)$ или $C^{(0,1)}(G_-)$ и $C^{(0,1)}(G_+)$. Здесь $C^{(1,0)}(\Omega)$ и $C^{(0,1)}(\Omega)$ — соответственно множества непрерывно дифференцируемых по x и t и непрерывных по t и x функций на множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^2$.

Литература

1. Барановская С.Н., Юрчук Н.И. *Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188–1191.

2. Ломовцев Ф.Е. *Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2017. № 3. С. 38–52.

3. Новиков Е.Н. *Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косой производными*: Автореф. дис. … канд физ.-мат. наук. Ин-т математики НАН Беларуси. Мн., 2017.

О ПРИВЕДЕНИИ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В.А. Шилинец

В ряде работ [1–3] использовались специальные дифференциальные операторы (формальные производные) для приведения к каноническому виду систем дифференциальных уравнений в частных производных.

В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x}=B_1\frac{\partial v}{\partial x}+B_2\frac{\partial v}{\partial y}+M_1u+N_1v+F_1u^2+E_1v^2+C_1uv,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = B_3\frac{\partial v}{\partial x} + B_4\frac{\partial v}{\partial y} + M_2u + N_2v + F_2u^2 + E_2v^2 + C_2uv, \tag{1}$$

где $B_k, M_i, N_i, F_i, E_i, C_i(u,v)$, $k = 1,\ldots,4$, $i = 1,2$, — известные (искомые) функции класса $A^*(G)$.

Через $A^*(G)$ всегда обозначаем класс всех аналитических функций (вообще комплексных) от действительных переменных x, y в некоторой односвязной области G, содержащей начало координат.

Решаем следующую задачу: имея систему вида (1), найти необходимое и достаточное условия, при которых существуют такие функции $p(x,y), q(x,y) \in A^*(G)$, что система (1) приводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} = a_1f + a_2f^2 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + c_1f\varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = a_3f + a_4f^2 + b_3\varphi + b_4\varphi^2 + c_1f\varphi, \tag{2}$$

где f, φ — линейные функции от u, v с коэффициентами класса $A^*(G)$, a_k, b_k, c_j, $k = 1,\ldots,4$, $j = 1,2$, — известные функции того же класса, а $\partial f/\partial p$ и $\partial f/\partial q$ — дифференциальные операторы (формальные производные), определяемые равенствами

$$\frac{\partial f}{\partial p} \equiv \frac{1}{\delta}(f'_xq'_y - f'_yq'_x), \quad \frac{\partial f}{\partial q} \equiv \frac{1}{\delta}(f'_yp'_x - f'_xp'_y) \tag{3}$$

где $\delta \equiv p'_xq'_y - p'_yq'_x \neq 0$.

Система (2), в силу (3), может быть записана, очевидно, в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A_1\frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_2\frac{\partial \varphi}{\partial y} + T_1f + \Theta_1\varphi + \Phi_1f^2 + Q_1\varphi^2 + K_1f\varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = A_3\frac{\partial \varphi}{\partial x} + A_4\frac{\partial \varphi}{\partial y} + T_2f + \Theta_2\varphi + \Phi_2f^2 + Q_2\varphi^2 + K_2f\varphi, \tag{4}$$

где

$$T_1 = a_1p'_x + a_3q'_x, \quad T_2 = a_1p'_y + a_3q'_y, \quad \Theta_1 = b_1p'_x + b_3q'_x, \quad \Theta_2 = b_1p'_y + b_3q'_y,$$

$$\Phi_1 = a_2p'_x + a_4q'_x, \quad \Phi_2 = a_2p'_y + a_4q'_y, \quad Q_1 = b_2p'_x + b_4q'_x, \quad Q_2 = b_2p'_y + b_4q'_y,$$

$$K_1 = c_1p'_x + c_2q'_x, \quad K_2 = c_1p'_y + c_2q'_y,$$

$$-A_1 = \frac{p'_xp'_y}{\delta}, \quad -A_1 = A_4, \quad A_2 = \frac{(p'_x)^2}{\delta}, \quad -A_3 = \frac{(p'_y)^2}{\delta}.$$

Теорема. *Система дифференциальных уравнений* (4) *сводится к системе вида* (2) *тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$-A_1 = A_4, \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Выяснены также условия преобразования системы дифференциальных уравнений (1) к системе вида (4).

Литература

1. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* М., 1959.

2. Стельмашук Н.Т. *О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных* // Сибирский математический журнал. 1964. Т. 5. № 1. С. 166–173.

3. Стельмашук Н.Т., Шилинец В.А. *О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов* // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2008. № 2. С. 61–65.

РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Е.С. Чеб

При решении задач механики твердого тела возникают граничные задачи для уравнений в частных производных старшего порядка. Поэтому актуальным является корректная по Адамару постановка граничных задач для таких уравнений. В работе рассматривается корректно поставленная граничная задача для линейного уравнения в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами, в случае наличия у него кратных характеристик и указан метод построения единственного решения при выполнении условий согласования начальных и граничных условий.

В полуполосе $Q = [0, \infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции $u : \overline{Q} = [0, \infty) \times \overline{\Omega} \ni \ni (t, x) \to u(t, x)$, где $\overline{\Omega}$ — замыкание области $\Omega = (0, l)$, рассмотрим гиперболическое уравнение четвертого порядка вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2\right)^2 u(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Будем рассматривать случай, когда коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 — постоянны, $a_1 < < 0$, $a_2 < 0$, $|a_1| < |a_2|$, $b_1, b_2 \geqslant 0$. При таких ограничения уравнение (1) имеет две кратные одинаково направленные характеристики. В этом случае граничные условия для (1) задаются не на всей границе.

Добавим к уравнению (1) граничные условия вида

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right|_{x=0} = \mu_s(t), \quad t > 0, \quad s = 0, 1, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right|_{x=l} = \nu_s(t), \quad t > -\frac{l}{a_2}, \quad s = 0, 1. \tag{4}$$

Обратим внимание, что условие (4) задается не на всей границе $x = l$, а только на части. Выбор таких граничных условий гарантирует корректность задачи (1)–(4) в классе четырежды непрерывно дифференцируемых функций [1].

Решение задачи (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} u(t, x) = e^{-b_1 t}(g_1(x + a_1 t) + (x + a_2 t) g_2(x + a_1 t)) + \\ + e^{-b_2 t}(g_3(x + a_2 t) + (x + a_1 t) g_4(x + a_2 t)), \end{aligned} \tag{5}$$

где g_1, g_2, g_3 и g_4 — любые функции из $C^4(\mathbb{R})$ аргумента $x + a_1 t$ для функций $g_i : (-\infty, l] \to g_i(y) \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, и аргумента $x + a_2 t$ для функций $g_i : (-\infty, l] \to \to g_i(y) \in \mathbb{R}$, $i = 3, 4$. Требуется определить общий вид функций g_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ в представлении (5) при условии, что будут выполняться начальные (2) и граничные условия (3), (4).

Предварительно из условий (2) определяется вид этих функций на отрезке $[0, l]$. Затем рекуррентно определяются функции, начиная с правой границы и переходя на левую границу. Попутно требуется выполнение условий согласования начальных и граничных условий [2].

Литература

1. Корзюк В.И., Чеб Е.С, Ле Тхи Тху. *Решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18. № 2. С. 36–54.

2. Корзюк В.И., Чеб Е.С. *Граничная задача с условиями Неймана для нестрого гиперболического уравнения второго порядка* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2014. № 2. С. 71–76.

ON THE WELL-POSEDNESS OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THIRD ORDER

A.T. Assanova

In the present communication we consider the initial-boundary value problem for partial differential equation of third order with two independent variables

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + D(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + E(t,x)u + f(t,x), \quad (1)$$

$$P_2(x)\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2} + P_1(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\bigg|_{t=0} + P_0(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + S_2(x)\frac{\partial^2 u(0,x)}{\partial x^2} +$$

$$+ S_1(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}\bigg|_{t=0} + S_0(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \quad (2)$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \quad (4)$$

where $u(t,x)$ is unknown function, the functions $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, $E(t,x)$ and $f(t,x)$ are continuous on $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$, the functions $P_i(x)$, $S_i(x)$, $i = \overline{0,2}$, $\varphi(x)$ are continuous on $[0,\omega]$, the functions $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

The function $u(t,x) \in C(\Omega, R)$ that has partial derivatives

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \in C(\Omega,R), \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \in C(\Omega,R), \quad \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \in C(\Omega,R),$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t} \in C(\Omega,R), \quad \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^2 \partial t} \in C(\Omega,R)$$

is called a *classical solution* to problem (1)–(4) if it satisfies equation (1) for all $(t,x) \in \Omega$ and boundary conditions (2)–(4).

Currently, the problems of mathematical physics connected with the description of wave motion of liquids of different nature are drawn by great attention. This interest is caused not only by big applied importance of these problems, but their new theoretical and mathematical content often do not have analogues in the classical mathematical physics. One of the important classes of such problems are the initial-boundary value problems for higher order partial differential equations [1, 2]. Based on them, the conditions for solvability of considered boundary value problems are obtained, and the ways for finding their solutions are offered. However, finding the effective signs of unique solvability of initial-boundary value problems for higher order partial differential equations, still remains actual.

In this report we investigate of the questions for unique solvability, well-posedness to problem (1)–(4). For this we use method of introduction new unknown functions [3, 4]. The initial-boundary value problem for partial differential equation of third order is reduced to a problem consisting of family of two-point boundary value problems for ordinary differential equations and functional relations. It is established that the well-posed solvability of problem (1)–(4) is equivalent to the well-posed solvability of family of two-point boundary value problems for the ordinary differential equation. Criterion for well-posed solvability of problem (1)–(4) is received in the terms of initial data.

Aknowledgement. The work is partially supported by grant of Ministry Education and Science of the Republic of Kazakhstan (No AP05131220).

References

1. Ptashnyck B. I. *Ill-posed boundary value problems for partial differential equations.* Kiev: Naukova Dumka, 1984. (in Russ)

2. Kiguradze T. I., Kusano T. *Well-posedness of initial-boundary value problems for higher-order linear hyperbolic equations with two independent variables* // Differ. Equat. 2003. V. 39. № 4. P. 553–563.

3. Asanova A.T., Dzhumabaev D. S. *Correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations* // Doklady Mathematics. 2003. V. 68. № 1. P. 46–49.

4. Asanova A. T., Dzhumabaev D. S. *Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations* // Differ. Equat. 2005. V. 41. № 3. P. 352–363.

ANDRONOV — HOPF BIFURCATION FOR HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

I. Kmit, L. Recke

We consider boundary value problems for semilinear first order hyperbolic systems of the type

$$\partial_t u_j + a_j(x,\lambda)\partial_x u_j + b_j(x,\lambda,u) = 0, \quad x \in (0,1), \quad j = 1,\dots,n,$$

$$u_j(0,t) = \sum_{k=m+1}^{n} r_{jk} u_k(0,t), \quad j = 1,\dots,m,$$

$$u_j(1,t) = \sum_{k=1}^{m} r_{jk} u_k(1,t), \quad j = m+1,\dots,n,$$

with smooth coefficient functions a_j and b_j such that $b_j(x,\lambda,0) = 0$. We state conditions for Andronov — Hopf bifurcation, i.e. for existence, local uniqueness (up to phase shifts), smoothness and smooth dependence on λ of time-periodic solutions bifurcating from the zero stationary solution. Further, we derive a formula which determines the bifurcation direction and the stability of the bifurcating time-periodic solutions. Finally, we sketch similar results for semilinear damped wave equations, and we describe applications to semiconductor laser modelling.

The proofs are done by means of a Lyapunov — Schmidt reduction procedure. For this purpose, Fredholm properties of the linearized system and implicit function theorem techniques are used.

There are several distinguishing features of the proofs of Andronov — Hopf bifurcation theorems for hyperbolic PDEs in comparison with those for parabolic PDEs or for ODEs:

First, the question of Fredholm solvability of the linearized problem (in appropriate spaces of time-periodic functions) is essentially more difficult. Second, the question if a non-degenerate time-periodic solution of the nonlinear problem depends smoothly on the system parameters is much more delicate. And third, a sufficient amount of dissipativity is needed in order to prevent small denominators from coming up, and we present an explicit sufficient condition for that in terms of the data of the PDEs and of the boundary conditions.

Roughly speaking, the result is as follows: The statements of Andronov — Hopf bifurcation theorems for hyperbolic PDEs are similar to those for parabolic PDEs or for ODEs, but the proofs differ essentially from those for parabolic PDEs or for ODEs.

References

1. Kmit I., Recke L. *Hopf bifurcation for semilinear dissipative hyperbolic systems* // J. Differ. Equat. 2014. V. 257. P. 264–309.

2. Kmit I., Recke L. *Solution regularity and smooth dependence for abstract equations and applications to hyperbolic PDEs* // J. Differ. Equat. 2015. V. 259. P. 6287–6337.

MULTIPERIODIC SOLUTIONS OF A LINEAR AUTONOMOUS SYSTEM WITH AN OPERATOR OF DIFFERENTIATION WITH RESPECT TO DIRECTIONS OF THE LYAPUNOV VECTOR FIELD

Zh.A. Sartabanov, B.Zh. Omarova

The unknown n-vector-function x of the time variables $\tau \in (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, $(t_1, \ldots, t_\alpha) = t \in \mathbb{R}^\alpha$, and the spatial variables $(\xi_j, \eta_j) = \zeta_j) \in \mathbb{R}^2$, $j = \overline{0, \beta}$, $(\zeta_0, \ldots, \zeta_\beta) = \zeta \in \mathbb{R}^k$, $k = 2 + 2\beta$ is determined by a linear autonomous system

$$Dx = Bx + f(\zeta) \tag{1}$$

is determined by a linear autonomous system $D = \partial/\partial\tau + \langle e, \partial/\partial t\rangle + \langle A\zeta + \psi(\zeta), \partial/\partial\zeta\rangle$, where $\langle , \rangle$ is the scalar product of α-vectors, $e = (1, \ldots, 1)$, $\partial/\partial t = (\partial/\partial t_1, \ldots, \partial/\partial t_\alpha)$ and k-vectors $A\zeta + \psi(\zeta)$,

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} = \left(\frac{\partial}{\partial\zeta_0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\zeta_\beta}\right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}, \frac{\partial}{\partial\eta_0}\right), \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}, \frac{\partial}{\partial\eta_\beta}\right)\right).$$

The vector field $\frac{d\zeta}{d\tau} = A\zeta + \psi(\zeta)$ splits into independent systems

$$\frac{d\zeta_j}{d\tau} = \Omega_j\zeta_j + \psi_j(\zeta_j), \quad \Omega_j = \nu_j J_2, \quad j = \overline{0, \beta},$$

where J_2 is the simplistic unit 2×2-matrix, $\nu_0, \ldots, \nu_\beta$ are the rationally incommensurate positive constants, the vector function $\psi_j(\zeta_j) = (\psi_{j1}(\xi_j, \eta_j), \psi_{j2}(\xi_j, \eta_j))$ has the properties $\psi_{j1} = -\partial S_j/\partial\eta_j$, $\psi_{j2} = -\partial S_j/\partial\xi_j$, $j = \overline{0, \beta}$, and the functions $S_j = S_j(\xi_j, \eta_j)$ are expanded into power series beginning with the third power.

This vector field is a special case of the Lyapunov systems and briefly put

$$D\zeta + \psi(\zeta) \in L. \tag{2}$$

All eigenvalues $\mu_j, j = \overline{1, n}$ of the matrix B have nonzero real parts

$$\operatorname{Re}\mu_j = \operatorname{Re}\mu_j(B) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

The vector-function $f(\zeta)$ belongs to the class $C_{\zeta}^{\infty}(\mathbb{R}^k)$ of the analytic functions in the $\mathbb{R}^k$:

$$f(\zeta) \in C_{\zeta}^{\infty}(\mathbb{R}^k). \tag{4}$$

The report discusses the problem of determining dimension α of the time vector t in connection with the dimension of the basis frequency $\nu_0, \ldots, \nu_\beta$ and under conditions (2)–(4) prove theorems about multiperiodic solutions on the basis of [1–4] homogeneous systems $Dx = 0$, $Dx = Bx$ and systems (1) and their properties are incommensurable.

References

1. Lyapunov A.M. *General problem ofstability of motion.* Moscow; Leningrad, 1950. P. 472. (in Russian)

2. Харасахал В.Х. *Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений.* Алма-Ата: Наука, 1970.

3. Умбетжанов Д.У. *Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных.* Алма-Ата: Наука, 1979.

4. Сартабанов Ж.А., Кулжумиева А.А. *Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем.* Уральск, 2013.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ БЕСКОНЕЧНО ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В.А. Акимов

Рассмотрим кососимметричный оператор дифференцирования бесконечно высокого порядка $\mathrm{sh}(\mathrm{ad}_x) * f(x) = 0.5(f(x+a) - f(x-a))$ в степени m, т.е. $\mathrm{sh}^m(\mathrm{ad}_x)$, где a — расстояние между узлами интерполирования, $d_x = d/dx$ — производная по переменной x, $f(x)$ произвольная функция. Используя бином Ньютона, а также свойство оператора сдвига, непосредственно получим:

$$\mathrm{sh}^m(\mathrm{ad}_x) * f(x) = \frac{1}{2^m}\Bigg[f(x+ma) - \frac{m}{1}f(x+ma-2a) + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}f(x+ma-4a) -$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}f(x+ma-6a) + \cdots + (-1)^k\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} \times$$

$$\times f(x+ma-2ka) + \ldots + (-1)^{m-2}\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}f(x-ma+4a) + (-1)^{m-1}\frac{m}{1}f(x-ma+2a) +$$

$$+ (-1)^m f(x-ma)\Bigg] = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_n^k f(x-ma+2ka) \qquad (1)$$

Изучим свойства только что полученного нового соотношения (1) взяв, например, в качестве пробной функции часто используемую на практике гармоническую функцию вида $f_n(x) = \sin nx$. Несложно установить, что

$$m=1: \quad \mathrm{sh}\,\mathrm{ad}_x * f_n(x) = \frac{1}{2}[f_n(x+a) - f_n(x+a)] = \frac{1}{2}[\sin n(x+a) - \sin n(x-a)] = \sin na\cos nx,$$

$$m=2: \quad \mathrm{sh}^2\,\mathrm{ad}_x * f_n(x) = \frac{1}{4}[f_n(x+2a) - 2f_n(x) + f_n(x-2a)] =$$

$$= \frac{1}{4}[\sin n(x+2a) - 2\sin nx + \sin n(x-2a)] = -\sin^2 na\sin nx,$$

$$m=3: \mathrm{sh}^3\,\mathrm{ad}_x * f_n(x) = \frac{1}{8}[f_n(x+3a) - 3f_n(x+a) + 3f_n(x-a) - f_n(x-3a)] =$$

$$= \frac{1}{8}\{\sin n(x+3a) - \sin n(x-3a) - 3[\sin n(x+a) - \sin n(x-a)]\} = -\sin^3 na\cos nx,$$

а в общем случае имеет место представление

$$\mathrm{sh}^m\,\mathrm{ad}_x * \sin nx = (-1)^m\sin^m na\cdot\cos(nx+m\pi). \qquad (2)$$

Если в качестве пробной функции взять $f_n^m(x) = x^m\sin nx$, то с учетом равенств

$$f(x-ma+2ka) = \sin n(x-m\pi+2k\pi) = (-1)^m\sin nx, \quad k=0,1,2,\cdots,m,$$

$$\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_n^k f(x-ma+2ka)=\operatorname{sh}^m(\mathrm{ad}_x)*f(x)=\operatorname{sh}^m(\mathrm{ad}_x)*x^m=$$

$$=[(\mathrm{ad}_x)^m+\frac{m}{3!}(\mathrm{ad}_x)^{m+2}+\cdots]*x^m=m!a^m \quad (3)$$

формула (1) существенно упрощается и принимает вид

$$\operatorname{sh}^m(\mathrm{ad}_x)*[x^m\sin nx]=(-1)^m m!a^m\sin nx. \quad (4)$$

Таким образом, в настоящей работе на основании формул (1)–(4), полученных посредством дифференциальных операторов бесконечно высокого порядка, показан переход от разностных схем с обычной равноотстоящей решеткой к разностным схемам с двухсторонней симметричной равноотстоящей решеткой, что в дальнейшем позволит в теории конечных разностей осуществлять более точную интерполяцию функций.

ОБ ОСНОВНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ДРОБНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т.С. Алероев

Под символом d^α/dx^α будем подразумевать оператор дробного интегрирования (в смысле Римана — Лиувилля) при $\alpha<0$ и дробного дифференцирования (в смысле Римана — Лиувилля) [1] при $\alpha>0$. Пусть $\{\gamma_k\}_0^2$-некоторое множество действительных чисел, удовлетворяющих условию $0<\gamma_j\leqslant 1$, $(0\leqslant j\leqslant 2)$. Обозначим $\sigma_k=\sum_{j=0}^{k}\gamma_j-1$, $\mu_k=\sigma_k+1=\sum_{j=0}^{k}\gamma_j$, $0\leqslant k\leqslant 2$, и предположим, что $\sigma_2= =\mu_2-1=\sum_{j=0}^{2}\gamma_j-1>0$. Следуя М.М. Джрбащяну [1], рассмотрим интегро-дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}f(x),\quad D^{(\sigma_1)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}f(x),$$

$$D^{(\sigma_2)}f(x)\equiv\frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}}\frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}}\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}f(x),$$

впервые введенные М.М. Джрбащяном при исследовании уравнения

$$D^{(\sigma_2)}u(x)-\lambda u(x)=0.$$

Настоящая работа посвящена спектральному анализу задач

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}u''(t)+\lambda u(x)=0, \quad (1)$$

$$u(0)=0,\quad u(1)=0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{u'(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha}}\,d\tau+\lambda u(x)=0, \quad (3)$$

$$u(0)=0,\quad u(1)=0. \quad (4)$$

В частности, в ней доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если*

$$0 < \alpha < \left(\frac{32\pi^2}{9} + \frac{2}{3}\right)^{-1},$$

то первое собственное число задачи (1), (2) *положительное и простое, а также основной тон не имеет узлов. При* $\alpha > 2/3$, *все собственные значения задачи* (1), (2) *комплексные.*

Теорема 2. *Первое собственное число* λ_1 *задачи* (3), (4) *положительное, простое и удовлетворяет условию*

$$0 < \lambda_1^{-1} < \frac{\Gamma(2+2\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)},$$

а также основной тон не имеет узлов при всех $0 < \alpha < 1$.

Литература

1. Джрбашян М.М. *Краевая задача для дифференциального оператора типа Штурма — Лиувилля дробного порядка* // Изв. АН Армянской ССР. Сер. мат. 1970. Т. 5. № 2. С. 71–96.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И МНЕМОФУНКЦИИ НА ОКРУЖНОСТИ

А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова

Пространство обобщенных функций (распределений) $D'(\mathbb{S}^1)$ определяется как сопряженное к пространству $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, снабженному счетной системой норм p_m [1, 2]. Пространство $L_1(\mathbb{S}^1)$ вкладывается в $D'(\mathbb{S}^1)$ по формуле

$$L_1(\mathbb{S}^1) \ni u \to \langle u, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int u(z)\overline{\varphi(z)}\,|dz|.$$

Поскольку каждая функция φ из $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ разлагается в ряд Фурье $\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k z^k$, где последовательность коэффициентов φ_k убывает быстрее любой степени k, элементы из $D'(\mathbb{S}^1)$ представляются в виде рядов Фурье $u = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k z^k$, где $C_k = \langle u, z^k \rangle$ и эти коэффициенты для каждого u возрастают не быстрее некоторой степени k. Распределение u, как функционал, действует по формуле $\langle u, \varphi \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \overline{\varphi_k}$.

В пространстве $D'(\mathbb{S}^1)$ задано дифференцирование и умножение на гладкие функции, но не определено произведение произвольных распределений. В связи с тем, что такие произведения встречаются в ряде приложений, были построены другие обобщения понятия функции, которые называют новыми обобщенными функциями или мнемофункциями [3, 4]. В случае окружности наиболее простая конструкция следующая. Рассматриваются семейства бесконечно дифференцируемых функций f_ε, зависящие от малого параметра ε, такие, что при некотором q имеет место оценка

$$p_m(f_\varepsilon) \leqslant C/\varepsilon^{m+q}.$$

Множество $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, таких семейств является алгеброй. В ней выделяется идеал

$$J(\mathbb{S}^1) = \{f_\varepsilon : \forall p \ \text{ и } \ m \exists C : p_m(f_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^p\}.$$

Алгебра мнемофункций определяется как фактор-алгебра $G(\mathbb{S}^1) = \widetilde{G(\mathbb{S}^1)}/J(\mathbb{S}^1)$.

Взаимосвязь с пространством распределений устанавливается с помощью отношения ассоциированности Пусть $G_{as} \subset G(\mathbb{S}^1)$ состоит из семейств, сходящихся в $D'(\mathbb{S}^1)$. На G_{as} определено отображение ассоциированности:

$$G_{as} \ni [f_\varepsilon] \to \mathrm{Lim}\,([f_\varepsilon]) := \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon \in D'(\mathbb{S}^1).$$

Это отображение не является инъективными, и с каждым распределением u связано обширное семейство мнемофункций, ассоциированных с u.

Далее строятся правые обратные к Lim, т.е. линейные отображения $R : D'(\mathbb{S}^1) \to \to G(\mathbb{S}^1)$ такие, что $\mathrm{Lim}\, R(u) = u$. Согласно определению, каждое такое R задает способ аппроксимации распределения гладкими функциями и является вложением $D'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемофункций.

Заданное R позволяет определить произведение распределений $uv = R(u)R(v) \in \in G(\mathbb{S}^1)$, которое является мнемофункцией. Если произведение $R(u)R(v)$ ассоциировано с распределением h, то h считается произведением uv, порожденным заданным способом аппроксимации R. Таким образом, возникает множество пар распределений, для которых определено произведение в указанном смысле, также являющееся распределением. Представляет интерес описание множества таких пар и вычисление соответствующих произведений.

Представление распределения u в виде ряда (1) порождает естественную аппроксимацию u гладкими функциями:

$$R(u) = u_\varepsilon(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k (1 - \mathrm{sign}\, k\varepsilon)^{|k|} z^k. \tag{1}$$

Целью работы является описание произведений распределений, порожденных указанным способом аппроксимации.

В пространстве $D'(\mathbb{S}^1)$ выделим подпространства $D'_+(\mathbb{S}^1) = \{u : C_k = 0 \text{при} k < 0\}$ $D'_-(\mathbb{S}^1) = \{u : C_k = 0 \text{ при } k \geqslant 0\}$.

Теорема. *При способе аппроксимации* (1) *каждое из подпространств* $D'_\pm(\mathbb{S}^1)$ *является алгеброй относительно введенного умножения.*

Таким образом, основные сложности связаны с исследованием произведений элементов из $D'_+(\mathbb{S}^1)$ на элементы из $D'_-(\mathbb{S}^1)$.

Примеры. В различных вопросах анализа активно используются функции вида $1/(z - \xi)^n$. При $|\xi| = 1$ такие функции неинтегрируемы, но каждой из них естественно соответствует целое семейство распределений. В частности, особый интерес представляют распределение $\mathcal{P}(1/(z-1))$ и δ-функции. Они задаются выражениями

$$\left\langle \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right), \varphi \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{S}^1} \frac{1}{z-1} \varphi(z)\, dz,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Заметим, что сингулярный интегральный оператор Коши на окружности задается именно с помощью этого распределения. δ-функция, сосредоточенная в точке 1, является функционалом $\langle \delta_1, \varphi \rangle = \varphi(1)$.

В настоящей работе получены выражения для произведений вида

$$\left[A_1 \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) + A_2 \delta_1\right] \left[B_1 \mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right) + B_2 \delta_1\right]$$

и выделены случаи, когда такое произведение является распределением. Некоторые из полученных утверждений являются аналогами родственных утверждений для распределений на прямой, полученных еще в книге [2].

Литература

1. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.

2. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.* М.: Мир, 1976.

3. Colombeau J.F. *New generalized functions and multiplication of distributions.* Amsterdam: North-Holland, 1984.

4. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. *Об общем методе построения алгебр обобщенных функций* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 43. № 3. С. 680–684.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

В.Б. Васильев

0. В работе изучаются псевдодифференциальные операторы и уравнения в пространствах Соболева — Слободецкого переменного порядка. Подобные исследования проводились и ранее (см. работы [1, 2]), однако не получили дальнейшего развития. Автор ранее изучал псевдодифференциальные уравнения в областях с негладкой границей [4–8] и выражает надежду, что можно существенно расширить область применения развитых методов с использованием локального принципа [3] и принципа факторизуемости [4].

1. Пусть $s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) существует конечный предел $\lim\limits_{|x|\to+\infty} s(x)$,

2) функция $s(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{R}^m$, т.е. существует постоянная $C>0$ такая, что $|s(x_1)-s(x_2)| \leqslant c|x_1-x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$.

Для фиксированной точки $x \in \mathbb{R}^m$ мы вводим следующее

Определение 1. По определению, локальным пространством Соболева — Слободецкого $H^{s(x)}(\mathbb{R}^m)$ состоит из (обобщенных) функций, для которых конечна величина

$$\|u\|_{s(x)} \equiv \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|)^{2s(x)} |\tilde{u}(\xi)|^2\, d\xi\Bigg)^{1/2},$$

где $\tilde{u}$ обозначает преобразование Фурье функции u.

Величина $\|u\|_{s(x)}$ называется локальной H^s-нормой функции u.

Определение 2. Пусть на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ задана функция $A(x,\xi)$. Псевдодифференциальным оператором A с символом $A(x,\xi)$ называется оператор вида

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} A(x,\xi) e^{i(x-y)\xi} u(y)\, dy\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Функция $A(x,\xi)$ называется символом оператора A.

2. Предположим, что функция $\alpha : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ обладает такими же свойствами, что и функция $s(x)$.

Определение 3. Класс символов $E_{\alpha(x)}$ состоит из функций $A(x,\xi)$, определенных на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих условиям $c_1(1+|\xi|)^{\alpha(x)} \leqslant |A(x,\xi)| \leqslant c_2(1+|\xi|)^{\alpha(x)}$, для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$ найдется такая окрестность U_{x_0}, что для всех $x \in U_{x_0}$ выполняется неравенство $|A(x,\xi) - A(x_0,\xi)| \leqslant c_3|x - x_0|(1+|\xi|)^{\alpha(x)}$, где c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные. Функцию $\alpha(x)$ назовем переменным порядком псевдодифференциального оператора (символа).

Ясно, что класс $E_{\alpha(x)}$ состоит из эллиптических символов, т.е. таких, что

$$\inf_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m} |A(x,\xi)| > 0.$$

Зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Оператор с символом $A(x_0,\xi)$ будем обозначать A_{x_0}. Тогда с учетом определения 3 легко получить следующий результат.

Лемма 1. *Если $A(x_0,\xi) \in E_{\alpha(x_0)}$, то оператор A_{x_0} ограничен в локальном пространстве Соболева — Слободецкого, $A_{x_0} : H^{s(x_0)} \to H^{s(x_0)-\alpha(x_0)}$.*

Определение 4. Оператор A_{x_0} мы назовем локальным представителем оператора A в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, и оператор A называем локально ограниченным в точке x_0, если оператор $A_{x_0} : H^{s(x_0)} \to H^{s(x_0)-\alpha(x_0)}$ ограничен.

3. Пусть $S(\mathbb{R}^m)$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций. Хорошо известно, что $S(\mathbb{R}^m)) \subset H^{s(x)}(\mathbb{R}^m)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, и является всюду плотным подмножеством. Обозначим H^s пространство, полученное замыканием $S(\mathbb{R}^m)$ по норме $\|u\|_s = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^m} \|u\|_{s(x)}$.

Основные результаты об операторах переменного порядка заключены в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Если оператор A с символом $A(x,\xi)$ локально ограничен, то он ограничен $A : H^s \to H^{s-\alpha}$.*

Теорема 2. *Если локальные представители $A_{x_0} : H^{s(x_0)} \to H^{s(x_0)-\alpha(x_0)}$ оператора A обратимы в каждой точке $\mathbb{R}^m$, включая бесконечно удаленную, то оператор $A : H^s \to H^{s-\alpha}$ фредгольмов.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.7311.2017/8.9).

Литература

1. Эскин Г.И. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1973.

2. Вишик М.И., Эскин Г.И. *Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения* // УМН. 1967. Т. 22. № 1. С. 15–76.

3. Симоненко И.Б. *Локальный метод в теории инвариантных относительно сдвига операторов и их огибающих.* Ростов на Дону, 2007.

4. Васильев В.Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.* М.: УРСС, 2-е изд., 2010.

5. Васильев В.Б. *Потенциалы для эллиптических краевых задач в конусах* // Сибирск. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1129–1149.

6. Васильев В.Б. *Псевдодифференциальные уравнения на многообразиях со сложными особенностями на границе* // Сибирск. журн. чистой и прикл. математики. 2016. № 3. С. 3–14.

7. Васильев В.Б. *Модельные эллиптические краевые задачи для псевдодифференциальных уравнений в канонических негладких областях* // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Т. 31. С. 3–16.

8. Васильев В.Б. *Псевдодифференциальные уравнения в конусах с точками сопряжения на границе* // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 9. С. 1123–1135.

СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОГО ИНДЕКСА ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРУППАХ

П.А. Голуб, А.Р. Миротин

Всюду ниже G — нетривиальная связная компактная абелева группа с линейно упорядоченной группой характеров X, с положительным конусом X_+. Другими словами, в группе X выделена подполугруппа такая, что $X_+\bigcap X_+^{-1}=\{\mathbf{1}\}$ и $X_+\bigcup X_+^{-1}= =X$. Отметим, что дискретная абелева группа X может быть линейно упорядочена тогда и только тогда, когда ее группа характеров G связна [3]; при этом линейный порядок в X не единственный.

В [1], §3 было дано определение и рассмотрены важные свойства индекса вращения двумерных векторных полей на группе G, который является обобщением классического индекса вращения (см., например, [2]). Целью данной работы является обобщение индекса вращения на бесконечный случай и установление его основных свойств.

Далее $C(G)^{-1}$ будет обозначать группу обратимых элементов алгебры $C(G)$ непрерывных комплекснозначных функций на группе G; символ $\#$ обозначает число элементов конечного множества или $+\infty$, если множество бесконечно. Индекс вращения функций из $C(G)^{-1}$ определим в два этапа.

Определение 1. *Индекса вращения характера* определяется следующим образом:

$$\operatorname{ind}\chi:=\begin{cases}\#(X_+\backslash\chi X_+), & \chi\in X_+\\ -\operatorname{ind}\chi^{-1}, & \chi\notin X_+.\end{cases}$$

Пусть X^i — подгруппа характеров с конечными индексами. Согласно [1], $X^i= =\{\chi_1^n,\ n\in\mathbb{Z}\}$, если в X^i существует наименьший (строго) положительный элемент χ_1, и $X^i=\{\mathbf{1}\}$ в противном случае. Тогда определение 1 можно эквивалентно записать следующим образом:

$$\operatorname{ind}\chi=\begin{cases}n, & \chi=\chi_1^n,\\ +\infty, & \chi\in X_+\backslash X^i,\\ -\infty, & \chi\in X_-\backslash X^i.\end{cases}.$$

Ниже используется тот факт, что любая функция $\varphi\in C(G)^{-1}$ представима в виде $\chi e^g, g\in C(G),\chi\in X$ (разложение Бора — ван Кампена [4]), причем характер χ в этом разложении определяется однозначно [5].

Определение 2. *Индекс вращения функции* $\varphi\in C(G)^{-1}$ есть индекс вращения ее характера в разложении Бора — ван Кампена.

Теорема 1 (свойства индекса).

1) Отображение $\operatorname{ind}: X\to\mathbb{Z}\bigcup\{\pm\infty\}$ *сохраняет порядок. Точнее говоря, справедливы следующие утверждения:*

$$\forall\chi_1,\chi_2\in X\ \chi_1\geqslant\chi_2\Rightarrow\operatorname{ind}\chi_1\geqslant\operatorname{ind}\chi_2;$$

$$\forall\chi_1,\chi_2\in X\operatorname{ind}\chi_1<\operatorname{ind}\chi_2\Rightarrow\chi_1<\chi_2.$$

2) (Свойство логарифмичности индекса.) *Индекс произведения двух функций из* $C(G)^{-1}$ *равен сумме их индексов, если эта сумма имеет смысл.*

3) (Теорема о произведении вращений). *Индекс вращения композиции функции* $C(G)^{-1}$ *с функцией из* $C(\mathbb{T})^{-1}$ *есть произведение индексов вращения исходных функций (как обычно,* $0\cdot\infty:=0$).

Теорема 2 (обобщение теоремы Брауэра — Хопфа). *Две гомотопные функции из $C(G)^{-1}$ имеют одинаковый индекс вращения. Обратно, если у двух функции из $C(G)^{-1}$ индексы вращения совпадают и конечны, то эти функции гомотопны.*

Теорема 3 (характеристические свойства индекса). *Индекс вращения единственный (с точностью до целочисленного множителя) гомотопический инвариант в $C(G)^{-1}$ со свойством логарифмичности, согласованный с порядком в группе характеров.*

Далее функцию φ будем называть *нечетной*, если найдется такой элемент $a \in \in G, a \neq \boldsymbol{e}, a^2 = \boldsymbol{e}$, что $\forall x \in G \ \ \varphi(ax) = -\varphi(x)$.

Теорема 4 (обобщение теоремы Борсука — Хопфа). *Индекс вращения нечетной функции нечетный или бесконечный.*

Теорема 5 (обобщение теоремы Пуанкаре — Боля). *Если индексы двух функций из $C(G)^{-1}$ не равны, то существует по крайней мере одна точка, в которой значения функций (рассматриваемых как векторы в $\mathbb{R}^2$) направлены в противоположные стороны.*

Следствие. *Если индексы двух функций из $C(G)^{-1}$ не равны, то существует по крайней мере одна точка, в которой значения функций направлены в одну сторону.*

Литература

1. Миротин А.Р. *Фредгольмовы и спектральные свойства теплицевых операторов в пространствах H^p над упорядоченными группами* // Мат. сб. 2011. Т. 5 (202). С. 101–116.

2. Красносельский М. *Векторные поля на плоскости.* М., 1963.

3. Понтрягин Л.С. *Непрерывные группы.* М., 1954.

4. van Kampen E.R. *On Almost Periodic Functions of Constant Absolute Value* // Journal of the London Mathematical Society. 1937. s1–12. P. 3–6.

5. Горин Е.А. *Функционально-алгебраический вариант теоремы Бора — ван Кампена* // Мат. сб. 1970. Т. 82. (124). Вып. 2. С. 260–272.

ЗАДАЧА МИЛНА В ФОРМУЛАХ И ГРАФИКЕ

В.В. Горин

Исправлены ошибки в постановке стационарной задачи о функции распределения твердых шаров в бесконечном рассеивающем полупространстве, ограниченном поглощающей стенкой. Описаны свойства решения и построены графики, иллюстрирующие его поведение. Задача имеет прикладное значение в физике нейтронов, рассеяния излучения, представляет интерес и для физики плазмы.

Для функции распределения (ФР) $f(x,\xi)$, $x \geqslant 0$, $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\xi = \cos\vartheta$ рассмотрим задачу

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + f - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} d\xi' f(x,\xi') = 0, \quad x > 0, \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1, \tag{1}$$

$$f(0,\xi) = 0, \quad 0 < \xi \leqslant 1, \tag{2}$$

$$f(x,\xi) \geqslant 0, \quad x \geqslant 0, \quad -1 \leqslant \xi \leqslant 1. \tag{3}$$

Задача приведена к безразмерному виду, не содержащему никаких параметров. Скорость частиц и средняя частота их столкновений со случайными рассеивающими центрами равна единице.

В монографиях [1, с. 913; 2, с. 300] предлагается граничное условие на бесконечности:

$$f(\infty, \xi) = 0, \quad -1 < \xi < 0. \tag{4}$$

При внимательном рассмотрении постановки задачи это условие оказывается не только лишним, но и *неправильным*: задача (1)–(4) имеет единственное решение — тривиальное нулевое. Поскольку задача линейная и однородная, вместо условия на бесконечности следует задать плотность потока частиц (которая, в силу уравнения (1), не зависит от x) :

$$\int\limits_{-1}^{1} d\xi\, \xi\, f(x,\xi) = -\frac{1}{3}. \tag{5}$$

Введение плотности частиц

$$n(x) = \int\limits_{-1}^{+1} d\xi\, f(x,\xi), \tag{6}$$

позволяет выразить решение задачи (1)–(3) в виде

$$f(x,\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} dy\, e^{-y} n(x - y\xi), \quad \xi < 0;$$

$$f(x,\xi) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x/\xi} dy\, e^{-y} n(x - y\xi), \quad \xi > 0; \quad f(x,0) = \frac{1}{2} n(x). \tag{7}$$

При этом плотность частиц (6) удовлетворяет уравнению Винера — Хопфа:

$$n(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} dx' n(x') Ei(-|x - x'|), \quad Ei(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} dt\, \frac{e^t}{t}, \quad z < 0. \tag{8}$$

Методом Винера — Хопфа удается получить *аналитическое* решение уравнения (8):

$$n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+i\mu}^{+\infty+i\mu} dk \frac{ik-1}{k^2} \exp\left(\frac{ik}{2\pi}\int\limits_{-\infty-i\beta}^{+\infty-i\beta} d\eta \frac{1}{\eta(\eta-k)} \ln\left(\frac{1+\eta^2}{\eta^2}\left(1 - \frac{\operatorname{arctg}\eta}{\eta}\right)\right) - ikx\right), \tag{9}$$

где $0 < \mu$, $0 < \beta < 1$. Здесь нормировочный коэффициент — полином нулевой степени — подобран так, чтобы решение задачи (1)–(3) оказалось вещественным, а также удовлетворяющим условию (5). Выделение сингулярной при $k \to 0$ части образа Фурье решения (9) дает асимптотическое поведение плотности при $x \to \infty$:

$$n(x) \to n^{(s)}(x) = x + C, \quad C \approx 0.710446089\ldots \tag{10}$$

При этом асимптотика решения задачи (1)–(3), (5) имеет вид

$$f(x,\xi) \to (x - \xi + C)/2, \quad x \to \infty. \tag{11}$$

По-видимому, это результат неожиданный для авторов упомянутых монографий, но хорошо известный в физике плазмы как «двучлен Лоренца» [3, с. 283] (выражение (11) — полином первой степени по $\xi = \cos\vartheta$).

Формулы Винера — Хопфа дают удобный способ вычисления ФР на стенке при $x = 0$ (см. рис. 1), а также значения плотности на стенке: $n(0) \approx 0.577350272\ldots$ Само же решение уравнения (8) легче получить методом конечных элементов, зная асимптотику (10) (см. рис. 2–4).

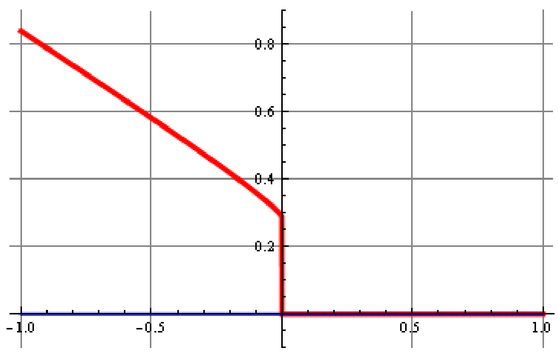


Рис. 1. Функция распределения частиц на стенке по косинусу угла наклона скорости к нормали.

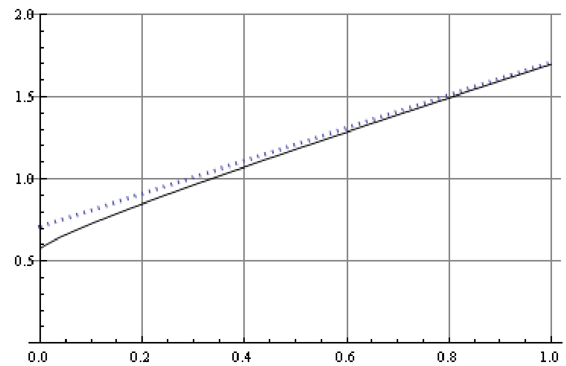


Рис. 2. Вычисления графика плотности частиц в пакете «Математика 9.0» методом конечных элементов (метод Галеркина [4]), $\chi_{\max} = 5$. Число узлов сетки равно 1001.

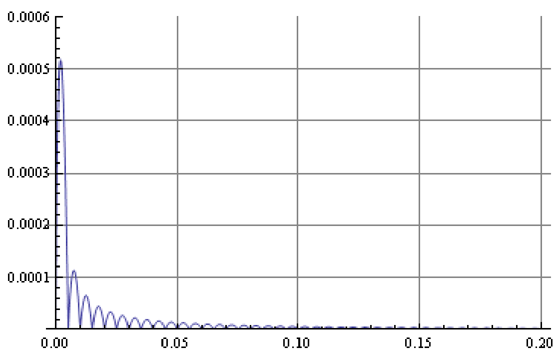


Рис. 3. Невязка решения уравнения (8) как функция χ в методе Галеркина при числе узлов 1001.

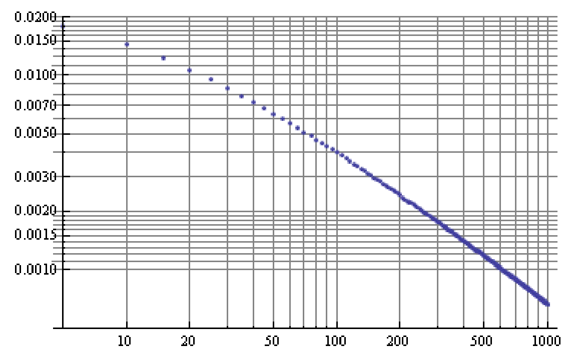


Рис. 4. Максимум невязки вычислений решения уравнения (8) в зависимости от числа узлов N в методе конечных элементов. $\chi_{\max} = \ln N$.

Как это ни удивительно, простой набор формулы Винера — Хопфа (9), например, в пакете «Математика 9.0» к построению графика, подобного рис. 2, не приводит. По всей вероятности, нужны специальные методы численного интегрирования этого выражения.

Литература

1. Морс Ф.М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики.* Т. 1, М.: ИЛ, 1958.
2. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. *Теория функций комплексной переменной.* М., 2016.
3. Райзер Ю.П. *Физика газового разряда.* Долгопрудный: «Интеллект», 2009.
4. Флетчер К. *Численные методы на основе метода Галеркина.* М.: «Мир», 1988.

О ПРИБЛИЖЕНИИ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.И. Жук, Н.А. Липская

Рассмотрим следующую систему на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1, p}, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ — некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \ldots, x^p(t)]$, а $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$ — функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$, непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$, $j = \overline{1,q}$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t, x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t)$. Здесь $L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L^j(t+s) \times$ $\times\, \rho_n(s)\, ds$, где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\rho \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho(s)\, ds = 1$, а $f_n = f * \widetilde{\rho}_n$, $\widetilde{\rho}_n(x_0, x_1, \ldots, x_p) = n^{p+1}\widetilde{\rho}(nx_0, nx_1, \ldots, nx_p)$, $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$, $\widetilde{\rho} \geqslant 0$, $\int_{[0,1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_p)\, dx_0 dx_1 \ldots dx_p = 1$, $\operatorname{supp}\widetilde{\rho} \subset [0,1]^{p+1}$.

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^t f^{ij}(s, x(s))\, dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leqslant t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1,p}, \tag{3}$$

где $L^{jc}(t)$ — непрерывная, а $L^{jd}(t)$ — разрывная составляющая функции $L^j(t)$, μ_r^j, $r = 1, 2, \ldots,$ — точки разрыва функции $L^j(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^{jd}(\mu_r+) - L^{jd}(\mu_r-)$ — величина скачка, $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u))\, ds, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,q},$$

$\mu \in T$, $x \in R^p$, $u \in R^q$.

Теорема. *Пусть функции* f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, *удовлетворяют условию Липшица и ограничены;* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$, — *непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $nh_n \to 0$, *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши* (2) *сходится к решению системы уравнений* (3) *в пространстве* $L^p(T)$, *если* $|x_{n0}(\tau_t) - x_0| \to 0$ *в пространстве* $L^p(T)$.

Аналогичная теорема в случае поточечной сходимости была получена в работе [1].

Литература

1. Жук А.И., Яблонский О.Л. *Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57. № 6. С. 20–23.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ТИПА НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Б.Б. Жураев, Н.Н. Панжиева

В докладе обсуждается однозначная разрешимость кревой задачи с неклассическими граничными условиями для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками [1–4].

Для уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sum_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=F(x,y) \tag{1}$$

рассмотрим следующую краевую задачу. Найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C^{2,1}(\bar{D})\bigcap C^{3,2}(D)$ удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\alpha_0(x)u(x,0)+\alpha_1(x)u(x,1)=h_0(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\beta_0(x)u_y(x,0)+\beta_1(x)u_y(x,1)=h_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\gamma_0(x)u(0,y)+\gamma_1(y)u_x(0,y)+\gamma_2(y)u_x(1,y)=\mu_0(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

$$u_{xx}(0,y)=\mu_1(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

$$u(1,y)=\mu_2(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1,$$

где $D=\{(x,y):0<x<1,\ 0<y\leqslant 1\}$, $F(x,y),\alpha_i(x),\beta_i(x),h_i(x)$ $(i=0,1)$, $\gamma_j(y),\mu_j(y)$, $(j=0,1,2)$ — заданные непрерывные функции своих аргументов, причем $\alpha_0^2+\alpha_1^2\neq 0$, $\beta_0^2+\beta_1^2\neq 0$, $\gamma_0^2+\gamma_1^2+\gamma_1^2\neq 0$.

Не ограничивая общности вместо уравнения (1) можно взять уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sum_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}=F(x,y). \tag{2}$$

Если в уравнении (1) $b(x,y)\in C^{3,1}(D)$, то преобразование $u(x,y)=v(x,y)\exp(2^{-1}\times \times\int_0^y b(x,t)\,dt)$ приводит к уравнению (2). Получены условия на заданные функции, при которых поставленная задача однозначно разрешима.

Литература

1. Джураев Т.Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* Ташкент: Фан, 1979.

2. Абдиназаров С. *Об одной краевой задаче для одного неклассического уравнения* // УзМЖ. 1991. № 4. С. 3–13.

3. Жураев Б.Б. *Неклассическая задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения.* // Уз МЖ. 2017. № 3. С. 8–16.

4. Кружков С.Н. *Об одной нелокальной задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками* // Тр. мат. Междунар. конф. посв. А.В. Бицадзе. Москва, 16–18 июня 2016 г. М., 2016. С. 59.

ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОБОБЩЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЭРМИТА — БИРКГОФА

М.В. Игнатенко, Л.А. Янович

Рассмотрим задачу построения и исследования обобщенных интерполяционных формул типа Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных, заданных в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций многих переменных.

Пусть $I = (\varepsilon_{ij})$ — $(k+1)\times(n+1)$-матрица, размерности элементы ε_{ij} $(i = 0, 1, \dots, k;\ j = 0, 1, \dots, n)$ которой 0 или 1; $N_{k,n}$ — множество пар целых неотрицательных чисел (i, j), которые определяют индексы ненулевых элементов матрицы I, т.е. $N_{k,n} = \{(i, j) : \varepsilon_{ij} = 1\}$, в том числе $N_{k,0} = \{(i, 0) : \varepsilon_{i0} = 1\}$; $M_{k,n} = N_{k,n} \backslash N_{k,0}$ — множество пар чисел (i, j), соответствующих $\varepsilon_{ij} = 1$ $(i = 0, 1, \dots, k;\ j = 1, 2, \dots, n)$; $H_{ij}^{(m)}(s)$ — интерполяционные фундаментальные многочлены, соответствующие задаче Эрмита — Биркгофа для случая скалярной чебышевской системы функций $\{\phi_l(s)\}_{l=0}^{N}$; $D_\nu H_{ij}^{(m)}(s_k) = \delta_{ik}\delta_{\nu j}$, где $D_0 f(s) = f(s)$, $D_\nu f(s) = \sum_{j=0}^{\nu} a_{j\nu} f^{(j)}(s)$, $a_{j\nu}$ — заданные числа, δ_{ij} — символ Кронекера; $\sigma_k(x(s)) = \sum_{(i,0)\in N_{k,0}} H_{i0}^{(k)}(x(s))$ — постоянная или некоторая переменная на $S \subseteq R$ функция.

Через $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ обозначим целочисленный вектор с неотрицательными составляющими $\{0 \leqslant \alpha_j \leqslant m\}_{j=1}^{m}$ (мультииндекс); через $D^\alpha x(t)$ — производную функции $x(t)$ порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$ вида

$$D^\alpha x(t) = \frac{\partial^{|\alpha|} x(t_1, t_2, \dots, t_m)}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \cdots \partial t_m^{\alpha_m}}, \quad D^0 x(t) = x(t), \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Рассмотрим дифференциальные операторы $F : C^{(m)}(T) \to Y$ произвольного фиксированного порядка m в частных производных:

$$F(x) = f(t, \{D^\alpha x(t)\}_{|\alpha|=0}^{m}), \tag{1}$$

где $C^{(m)}(T)$ — пространство функций $x(t) = x(t_1, t_2, \dots, t_m)$ непрерывно-дифференцируемых m раз на прямоугольнике $T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_m \subseteq \mathbb{R}^m$; Y — некоторое функциональное пространство; функция $y = f(t, u_0, u_1, \dots, u_\mu)$ задана на множестве $\Omega = T \times U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_\mu$, U_i — отрезки действительной оси $(i = 0, 1, \dots, \mu)$, $\mu = C_{2m}^{m} - 1 = (2m)!/(m!)^2 - 1$; $\{D^\alpha x(t)\}_{|\alpha|=0}^{m} = \{x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t), \dots, x'_{t_m}(t), x''_{t_1^2}(t), x''_{t_1,t_2}(t), \dots, x''_{t_m^2}(t), \dots, \frac{\partial^m x(t)}{\partial t_1^m}, \frac{\partial^m x(t)}{\partial t_1^{m-1}\partial t_2}, \dots, \frac{\partial^m x(t)}{\partial t_m^m}\}$. Далее предполагаем, что смешанные производные равного порядка, отличающиеся лишь последовательностью дифференцирования по одним и тем же переменным, совпадают; например, $x''_{t_1,t_2}(t_1, t_2) = x''_{t_2,t_1}(t_1, t_2)$ при $m = 2$.

Для операторов (1) дифференциал Гато $\delta^\nu F[x; h_1, h_2, \dots, h_\nu]$ порядка ν содержит произведение производных D^α от функций $h_1(t)$, $h_2(t), \dots, h_\nu(t)$ $(x(t), h_i(t) \in C^{(m)}(T),\ t \in T)$. Через $\delta^\nu F[x; h]$ обозначим дифференциал ν-го порядка, когда первые $\nu - 1$ $(\nu > 1)$ направления $h_i(t) \equiv 1$, а ν-е направление есть функция $h(t)$.

Рассмотрим также операторно-дифференциальные выражения

$$\widetilde{D}_0 F(x) = F(x), \ \ \widetilde{D}_j F(x) \equiv \widetilde{D}_j F[x; h_1, h_2, \dots, h_j] = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} \delta^i F[x; h_1 h_2 \ldots h_j].$$

Теорема 1. *Операторный многочлен*

$$B_{k,n}(F, x) = f(t, \{D^\alpha x_p(t)\}_{|\alpha|=0}^{m}) +$$

$$+ \sum_{(i,0)\in N_{k,0}} \int_0^1 \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{\partial f(t, \{D^\beta \upsilon_i(t,\tau)\}_{|\beta|=0}^{m})}{\partial(D^\alpha \upsilon_i(t,\tau))} D^\alpha \Big\{ \frac{H_{i0}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} (x_i(t) - x_p(t)) \Big\} d\tau +$$

$$+ \sum_{(i,j)\in M_{k,n}} \sum_{\nu=1}^{j} \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_{\nu j} \frac{\partial^\nu f(t, \{D^\beta x_i(t)\}_{|\beta|=0}^{m})}{\partial x_i^{\nu-1}(t) \partial(D^\alpha x_i(t))} D^\alpha \Big\{ \frac{H_{ij}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} \sigma_k(x_i(t)) \Big\}, \tag{2}$$

где функция $\upsilon_i(t,\tau) = x_p(t) + \tau(x_i(t) - x_p(t))$, $D^\alpha \upsilon_i(t,\tau) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\upsilon_i(t_1,t_2,\dots,t_m,\tau)}{\partial t_1^{\alpha_1}\partial t_2^{\alpha_2}\cdots\partial t_m^{\alpha_m}}$, $(i,0)\in N_{k,0}$; x_p *– фиксированный узел, соответствующий элементу* ε_{p0} *множества* $N_{k,0}$; *удовлетворяет интерполяционным условиям*

$$B_{k,n}(F;x_i) = F(x_i), \quad (i,0)\in N_{k,0}; \quad \tilde D_j B_{k,n}(F;x_i) = \tilde D_j F(x_i), \quad (i,j)\in M_{k,n}. \qquad (3)$$

(*Когда множество* $N_{k,0}$ *пустое, то* $B_{k,n}(F;x) = \sum_{(i,j)\in M_{k,n}} \tilde D_j F[x_i; H_{ij}^{(k)}(x)]$ *и первая группа равенств в условиях* (3) *отсутствует.*)

Теорема 2. *Для погрешности интерполирования* $r_{k,n}(x) = F(x) - B_{k,n}(F;x)$ *дифференциального оператора* $F(x)$ *вида* (1) *полином* $B_{k,n}(F;x)$*,заданным по правилу* (3)*,имеет место представление*

$$r_{k,n}(x) = \sum_{(i,0)\in N_{k+1,0}} \int\limits_0^1 \sum_{|\alpha|=0}^{m} \frac{\partial f(t,\{D^\beta \upsilon_i(t,\tau)\}_{|\beta|=0}^m)}{\partial(D^\alpha \upsilon_i(t,\tau))} D^\alpha\Big\{\Big(\frac{H_{i0}^{(k+1)}(x(t))}{\sigma_{k+1}(x(t))} - \frac{H_{i0}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))}\Big)\times$$

$$\times (x_i(t) - x_p(t))\Big\}d\tau + \sum_{(i,j)\in M_{k+1,n+q}} \sum_{\nu=1}^{j}\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_{\nu j}\frac{\partial^\nu f(t,\{D^\beta x_i(t)\}_{|\beta|=0}^m)}{\partial x_i^{\nu-1}(t)\partial(D^\alpha x_i(t))}\times$$

$$\times D^\alpha\Big\{\frac{H_{ij}^{(k+1)}(x(t))}{\sigma_{k+1}(x(t))}\sigma_{k+1}(x_i(t)) - \frac{H_{ij}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))}\sigma_k(x_i(t))\Big\},$$

где $x_{k+1} = x$; q *— разность числа столбцов матриц* $I_{k+1,n+q}$ *и* $I_{k,n}$; *многочлен* $H_{k+1,j}^{(k)}(x) \equiv 0$ $(j = 0,1,2,\dots)$.

Представленные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения приближенных методов решения некоторых нелинейных операторных уравнений, встречающихся в различных областях математической физики.

Аналогичные формулы лагранжева и эрмитова типа с узлами второй кратности для дифференциального оператора (1), а также явные представления погрешности интерполирования получены в работе [1]. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографиях [2–3].

Литература

1. Игнатенко М.В. *К теории интерполирования дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных* // Тр. Ин-та матем. Нац. акад. наук Беларуси. 2017. Т. 25. № 2. С. 11–20.

2. Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A. *Methods of Operator Interpolation* // Праці Ін-ту математики НАН України. 2010. Т. 83. С. 1–517.

3. Янович Л.А., Игнатенко М.В. *Основы теории интерполирования функций матричных переменных.* Мн.: Беларус. навука, 2016.

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАРКОВА — СТИЛТЬЕСА МЕР

И.С. Ковалева, А.Р. Миротин

Целью данной работы является исследование поведения преобразования Маркова — Стилтьеса мер на границе области $\mathbb{C}\setminus[1,+\infty)$.

Определение [1, глава 6] Преобразованием Маркова – Стилтьеса меры $\mu \in M^b([0,1],\mathbb{C})$ называется функция, задаваемая при $z \in \mathbb{C} \setminus [1,+\infty)$ соотношением

$$S\mu(z) = \int\limits_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}. \tag{1}$$

При $z \in [1,+\infty)$ интеграл в правой части (1) понимается как предел

$$S\mu(z) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{[0,1]\bigcap\{|t-1/z|>\varepsilon\}} \frac{d\mu(t)}{1-tz}.$$

Следующая теорема описывает поведение преобразования Маркова — Стилтьеса в $-\infty$.

Теорема 1. *Пусть* μ *— положительная мера на* $[0,1]$, $F = S\mu$. *Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \mu(\{0\})$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} xF(x) = -\int_0^1 t^{-1}\,d\mu(t)$ (*случай* $\int_0^1 t^{-1}\,d\mu(t) = \infty$ *не исключается*).

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2F'(x) = \int_0^1 t^{-1}\,d\mu(t)$ (*случай* $\int_0^1 t^{-1}\,d\mu(t) = \infty$ *не исключается*).

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xF'(x)}{F(x)} = -1$, *если* $\int_0^1 t^{-1}\,d\mu(t) \neq \infty$.

Введем обозначение $G(x) = \int_0^1 (1-tx)^{-2} t\,d\mu(t)$.

Теорема 2. *Пусть* μ *— положительная мера на* $[0,1], F = S\mu$.

1) $G(1/y) = \infty$ *для* μ*-п.в.* $y \in (0,1]$.

Если $G(x) < \infty$ *при некотором* $x \in [1,\infty)$, *то*

2) $\int_0^1 (1-tx)^{-2}\,d\mu(t) < \infty$, $\int_0^1 |1-tx|^{-1}\,d\mu(t) < \infty$ (*в частности, интеграл* (1) *существует в смысле Лебега*);

3) $\lim\limits_{y\to0} F(x+\imath y) = F(x)$;

4) $\lim\limits_{y\to0} y^{-1}\mathrm{Im}F(x+\imath y) = G(x)$;

5) $\lim\limits_{y\to0} (\imath y)^{-1}(F(x+\imath y) - F(x)) = G(x)$.

В следующей теореме устанавливаются аналоги формул Сохоцкого — Племеля для преобразования Маркова — Стилтьеса меры.

Теорема 3. *Пусть* μ *— вещественная мера на* $[0,1]$. *Если в некоторой точке* $x \in [1,\infty)$ *существует производная* $d\mu(x^{-1})/dx$, *то*

$$S\mu(x \pm \imath 0) = S\mu(x) \pm \pi\imath\mu'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x},$$

где $S\mu(x \pm \imath 0) := \lim\limits_{y\to+0} S\mu(x \pm \imath y)$.

Следствие. *При выполнении условий теоремы* 3 *имеют место равенства*

$$S\mu(x) = \frac{S\mu(x+\imath 0) + S\mu(x-\imath 0)}{2}, \quad S\mu(x+\imath 0) - S\mu(x-\imath 0) = 2\pi\imath\mu'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

Литература

1. Миротин А.Р. *Гармонический анализ на абелевых полугруппах.* Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЯВНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.П. Пучков, Т.В. Жуковская

В статье [1] рассмотрен итерационный метод решения уравнения

$$\Upsilon(x,x)=y, \tag{1}$$

в котором отображение Υ, действующее в метрических пространствах, является накрывающим по первому аргументу и липшицевым по второму. Здесь предлагается применение этого метода к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) — метрические пространства. Отображение $\varphi : X\to Y$ называется β-липшецевым, $\beta\geqslant 0$, если

$$\forall u,v\in X \quad \rho_Y(\varphi(u),\varphi(v))\leqslant \beta\rho_X(u,v).$$

Отображение $\psi : X\to Y$ называется α-накрывающим, $\alpha>0$, если

$$\forall x_0\in X \quad \forall y\in Y \quad \exists x\in X \quad \psi(x)=y, \quad \rho_X(x,x_0)\leqslant \alpha^{-1}\rho_Y(y,\psi(x_0)).$$

Пусть заданы $A\in\mathbb{R}$ и функция $f:[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори и такая, что

$$\forall r>0 \quad \exists m\in L_\infty \quad \forall x,\dot{x}\in\mathbb{R} \quad |x|+|\dot{x}|\leqslant r\Rightarrow |f(t,x,\dot{x})|\leqslant m(t).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$f(t,x,\dot{x})=0, \quad t\in[a,b], \quad x(a)=A. \tag{2}$$

Теорема. *Если функция $f(t,x,\dot{x})$ является β-липшецевой по второму аргументу, дифференцируемой по третьему и*

$$\exists\alpha>\beta(b-a) \quad \dot{\forall} t\in[a,b] \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad \forall\dot{x}\in\mathbb{R} \quad |f'_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})|\geqslant\alpha,$$

то существует решение задачи (2), *и последовательность итераций*

$$x_{i+1}(t)=A+\int\limits_a^t \dot{x}_{i+1}(s)ds, \quad \dot{x}_{i+1}(t)=\dot{x}_i(t)-(f'_{\dot{x}}(t,x_i(t),\dot{x}_i(t)))^{-1}f(t,x_i(t),\dot{x}_i(t)) \tag{3}$$

при любом $x_0\in L_\infty$ сходится по норме L_∞ к производной $\dot{x}$ решения задачи (2).

Доказательство основано на представлении задачи (2) в виде уравнения (1) с оператором

$$(\Upsilon(v,u))(t)=f(t,A+\int\limits_a^t u(s)ds, v(t)), \quad y(t)=0, \quad t\in[a,b].$$

При таких предположениях оператор $\Upsilon: L_\infty\times L_\infty\to L_\infty$, является α-накрывающим по первому аргументу и $\beta(b-a)$-липшецевым по второму, т.е. удовлетворяет условиям теоремы 3 работы [1].

Отметим, что для уменьшения объема вычислений последовательные приближения можно находить по модифицированной формуле

$$\dot{x}_{i+1}(t) = \dot{x}_i(t) - (f'_{\dot{x}}(t, x_i(t), \dot{x}_0(t)))^{-1} f(t, x_i(t), \dot{x}_i(t)).$$

В предположении ограниченного роста функции $f'_{\dot{x}}$ (точные условия приведены в [1] на стр. 365) последовательность $\{\dot{x}_i\}$ также сходится к производной $\dot{x}$ решения задачи (2).

Литература

1. Жуковская Т.В., Жуковский Е.С. *Об итерационных методах решений уравнений с накрывающими отображениями* // Сиб. журн. вычислит. математики. 2016. Т. 19. № 4. С. 357–369.

РАЗВЯЗАННЕ ДЫНАМІЧНАГА РАЎНАННЯ ІЕРАРХІЧНАЙ ДЫФУЗІІ З ДАПАМОГАЙ МАТРЫЦ. ВЫПАДАК НЕРЭГУЛЯРНАЙ ГЛЫБІНІ ДРЭВА

А.Я. Радына

У дакладзе будзе разглядацца раўнанне, пабудаванае паводле працэса выпадковага блукання па лістах канечнага дрэва адвольнай глыбіні, прычым глыбіня дрэва не ўсюды аднолькавая, аднак само дрэва мае правільную структуру: на кожным ягоным узроўні індэкс галінавання аднолькавы, хаця можа быць свой (змяняцца ад ўзроўня да ўзроўня). У рабоце [1] разглядаўся выпадак, калі дрэва абрываецца (заканчваецца) на адным узроўні. Метад развязання такіх раўнанняў спрычыняецца да ўтварэння камутатыўнай алгебры матрыц з адзінкай, якая апісываецца як лінейная камбінацыя базісных матрыц. Потым у гэтай алгебры шукаецца адваротная матрыца, такога ж выгляду.

Калі ж дрэва абрываецца на розных узроўнях, то адпаведная алгебра ўжо не будзе камутатыўнай і гэта дадае тэорыі пэўныя цяжкасці, аднак яны паспяхова пераадольваюцца.

Прапанаваны метад дае яўны развязак аднароднага і неаднароднага дынамічнага раўнання іерархічнай дыфузіі, які можна здзейсніць праграмным шляхам. Гэты метад не патрабуе вылічэння вялікіх колькасцяў аперацый, не гледзячы на тое, што выкарыстоўвае складанне і множанне матрыц вялікіх памераў. Адпаведныя базісныя матрыцы алгебры складаюцца і множацца па простым фармальным правілам, якія эканомяць час і вылічальныя рэсурсы.

Задача выпадковага блукання на дрэвах і іерархічнай дыфузіі падрабязна апісана ў работах [1–3]. Матрычны метад спачатку быў ужыты ў рабоце [5] для развязання задачы інтэрпаляцыі рэчаісных функцый p-адычнага аргумента, потым абагульнены на канечнавымерны выпадак ў [4].

Іерархічная дыфузія базуецца на выпадковым блуканні па «лістах» дрэва, таму натуральна разглядаць яе на p-адычных ліках, якія маюць тапалогію дрэва. Ад выпадковых блуканняў па дрэве ў рабоце [3] робіцца лімітавы пераход да псеўдадыферэнцыяльнага раўнання іерархічнай дыфузіі, якое развязываецца метадам пераўтварэння Фур'е. Гэты метад досыць універсальны, але мае пэўныя абмежаванні: 1) недастасоўны да нелінейнага выпадку, 2) ягоная праграмная рэалізацыя запатрабуе дыскрэтызацыі псеўда-дыферэнцыяльнага раўнання, што прывядзе да вяртання або да першапачатковых матрычных задач або да нейкіх іншых, не звязаных з першапачатковымі. Наш падыход развязвае мадэльнае дыскрэтнае раўнанне іерархічнай дыфузіі адразу, пазбягаючы лімітавага пераходу. Метад падыходзіць не толькі для p-адычных лікаў, але і для больш агульных, так званых, універсальных ці фактарыяльных лікаў (гл. [6], у кнізе [7, гл. 2, § 10] яны завуцца a-адычнымі).

Літаратура

1. Radyna A.Ya. *How to Solve Model Equation of Hierarchical Diffusion Using Some Matrix Algebra* // Facta Universitatis (Niš), Physics, Chemistry and Technology. 2016. V. 14. № 3. Special iss. P. 299–306.

2. Ogielski A.T., Stein D.L. *Dynamics on Ultrametric Spaces* // Physical Review Letters. 1985. V. 55. № 15. P. 1634–1637.

3. Avetisov V.A., Bikulov A.H., Kozyrev S.V. *Application of p-adic analysis to models of breaking of replica symmetry* // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. P. 8785–8791.

4. Radyna A.Ya. *m-Adic Multivariate Linear Splines and their Applications to Approximation Theory* // Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and its Applications Dedicated to the 110-th Anniversary of Stefan Banach, May 28-31, 2002, Lviv, Ukraine. North-Holland Mathematics Studies, 1977. Functional Analysis and its Applications. Elsevier. 2004. P. 257–266.

5. Khrennikov A.Yu., Radyna A.Ya. *Eigenvalues and Invertibility of Parisi Matrices. Ultramentric Group Point of View* // Advanced Studies in Contemprorary Mathematica. 2004. V. 8. № 2 P. 95–102.

6. van Dantzig M.D. *Nombres universels $\nu!$-adiques avec une introduction sur l'algebre topologique* // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1936. V. 3. № 53. P. 275–307.

7. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука. 1975.

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ПРИНЦИП ПЛОТНОСТИ

В.В. Скоморохов

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство с нормой $|\cdot|$; $\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов в $\mathbb{R}^n$; $h[\cdot,\cdot]$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами, содержащимися в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $C^n([a,b]\times[c,d])$ пространство непрерывных функций $u:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\|=\max\{|u(t,x)|:(t,x)\in[a,b]\times[c,d]\}$, а через $L^n([a,b]\times[c,d])$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $u:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\|=\int_a^b\int_c^d|u(t,x)|\,dtdx$.

Будем говорить, что $F:[a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, если выполняются следующие условия: при каждом $u\in\mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot,\cdot,u)$ измеримо; при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ отображение $F(t,x,\cdot)$ непрерывно; для каждого ограниченного множества $V\subset\mathbb{R}^n$ найдется такая функция $m_V(\cdot,\cdot)\in L^1([a,b]\times[c,d])$, что при почти всех $(t,x)\in[a,b]\times[c,d]$ и всех $u\in V$ выполняется неравенство $\|F(t,x,u)\|\leqslant m_V(t,x)$.

Пусть $t_k\in[a,b]$ $(a<t_1<\ldots<t_m<b)$ — конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$ множество всех непрерывных на каждом из промежутков $[a,t_1]\times[c,d]$, $(t_1,t_2]\times[c,d]$, $\ldots$, $(t_m,b]\times[c,d]$ ограниченных функций $u:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,m$ с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}=\sup\{|u(t,x)|:t\in\in[a,b]\times[c,d]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\in F(t,x,u(t,x)),\quad (t,x)\in[a,b]\times[c,d],\tag{1}$$

$$\Delta(u(t_k,x))=I_k(u(t_k,x)),\quad k=1,2,\ldots,m,\tag{2}$$

$$u(t,0)=\alpha(t),\quad u(0,x)=\beta(x),\tag{3}$$

где $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, непрерывны и $\alpha(0) = \beta(0)$, отображение $F : [a,b] \times [c,d] \times \mathbb{R}^n \to \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = = 1,2,\ldots,m$, непрерывны, $\Delta(u(t_k,x)) = u(t_k+0,x) - u(t_k,x)$, $k = 1,2,\ldots,m$.

Под *решением задачи* (1)–(3) будем понимать функцию $u \in \widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$, для которой существует такое $q \in L^n([a,b]\times[c,d])$, что при почти всех $(t,x) \in [a,b]\times[c,d]$ выполняется включение $q(t,x) \in F(t,x,u(t,x))$, и при всех $(t,x) \in [a,b]\times[c,d]$ имеет место представление

$$u(t,x) = \alpha(t) + \beta(x) - \alpha(0) + \int\limits_a^t \int\limits_c^x q(s,\tau)\,ds\,d\tau + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}\Delta(u(t_k,x)),$$

где $\Delta(u(t_k,x))$, $k = 1,2,\ldots,m$ удовлетворяет равенству (2), $\chi_{(\cdot,\cdot]}$ — характеристическая функция полуинтервала.

Обозначим через $K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ множество всех функций $\eta : [a,b] \times \times [c,d] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих следующими свойствами: при каждых $(u,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,\cdot,u,\delta)$ измерима; при почти всех $(t,x) \in [a,b] \times \times [c,d]$ и всех $\delta \in [0,\infty)$ функция $\eta(t,x,\cdot,\delta)$ непрерывна; для каждых $U \in \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $\mu_{U,\delta} : [a,b] \times [c,d] \to [0,\infty)$, что при почти всех $(t,x) \in [a,b] \times [c,d]$ и всех $u \in U$ и $\tau \in [0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,x,u,\tau) \leqslant \mu_{U,\delta}(t,x)$; при почти всех $(t,x) \in [a,b] \times [c,d]$ и каждого $u \in \mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim\limits_{\substack{z\to u\\ \delta\to 0+0}} \eta(t,x,z,\delta) = \eta(t,x,u,0) = 0$.

Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F} : [a,b] \times [c,d] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *аппроксимирует* отображение $F : [a,b] \times [c,d] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, что при почти всех $(t,x) \in [a,b]\times[c,d]$ и всех $(u,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ выполняется оценка

$$h[F(t,x,u), \widetilde{F}(t,x,u,\delta)] \leqslant \xi(t,x,u,\delta). \tag{4}$$

Отображение $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *аппроксимирующим отображение* $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимирующим. Функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ в неравенстве (4) определяет степень близости значения $\widetilde{F}(t,x,u,\delta)$ в точке $(t,x,u) \in \in [a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n$ к значению $F(t,x,u)$ для каждого фиксированного $\delta \in [0,\infty)$. Эту функцию $\xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *степенью аппроксимации отображения* $F : [a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ отображением $\widetilde{F} : [a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ или просто степенью аппроксимации. Будем считать, что $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ определяет способ или метод аппроксимации отображения $F(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Пару $(\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot), \xi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot))$ будем называть *аппроксимацией отображения* $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимацией, а если при почти всех $(t,x) \in [a,b]\times[c,d]$ и всех $(u,\delta) \in \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ выполняется включение $F(t,x,u) \subset \widetilde{F}(t,x,u,\delta)$, то *аппроксимацией вложением.*

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \in \mathrm{co}\, F(t,x,u(t,x)), \tag{5}$$

$$\Delta(u(t_k,x)) = I_k(u(t_k,x)), \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{6}$$

$$u(t,0) = \alpha(t), \quad u(0,x) = \beta(x), \tag{7}$$

где $\operatorname{co} F(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot))$ — выпуклая оболочка множества $F(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot))$, отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, непрерывны, $\Delta(u(t_k,x)) = u(t_k+0,x) - u(t_k,x)$, $k = 1,2,\ldots$ $\ldots,m$, $\alpha(\cdot),\beta(\cdot)$, непрерывны и $\alpha(0) = \beta(0)$.

Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$. Обозначим через $H(V)$, $H_{\rm co}(V)$ множества решений задач (1)–(3) и (5)–(7), соответственно, принадлежащих множеству V.

В докладе доказывается, что выполнение равенства $\overline{H(V)} = H_{\rm co}(V)$ (принцип плотности), где $\overline{H(V)}$ — замыкание множества $H(V)$ в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n([a,b]\times[c,d])$, является необходимым и достаточным условием для сходимости множеств решений дифференциальных включений, порожденных отображением $\widetilde{F} : [a,b] \times [c,d] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, аппроксимирующим отображение $F : [a,b]\times[c,d]\times\mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, определяющее дифференциальное включение (1).

Литература

1. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М.: Наука, 1985.

2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.* К.: Вища шк., 1987.

3. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы. Модели и приложения.* М.: Наука, 1991.

4. Булгаков А.И., Скоморохов В.В., Филиппова О.В. *Асимптотические свойства множества δ-решений функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями* // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1039–1043.

5. Булгаков А.И., Скоморохов В.В. *Аппроксимация дифференциальных включений* // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 35–52.

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.А. Спасков, А.К. Хмызов

В работе мы изучаем следующую краевую задачу для системы линейных дифференциальных уравнений, записанную в матричном виде:

$$\dot{X}(t) = \dot{L}(t)X(t) + \dot{F}(t), \tag{1}$$

$$M_1X(0) + M_2X(b) = Q. \tag{2}$$

Здесь $t \in T = [0;b] \subset \mathbb{R}$, $X : T \to \mathbb{R}^p$ — неизвестная вектор-функция, $L : \mathbb{R} \to$ $\to \mathbb{R}^{p\times p}$, $L(t) = (L^{ij}(t))$ где $i,j = 1,\ldots,p$ и $L^{ij}(\cdot)$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации, при $t \leqslant 0$ $L^{ij}(t) = L^{ij}(0) = 0$, при $t > bL(t) = L(b)$, $F : \mathbb{R} \to$ $\to \mathbb{R}^p$, $F^i(\cdot)$, $i = 1,\ldots,p$ — непрерывные справа функции ограниченной вариации, при $t \leqslant 0F^i(t) = F^i(0)$, при $t > b$ $F^i(t) = F^i(b)$; M_1, M_2 — некоторые заданные матрицы: $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $Q \in \mathbb{R}^p$ — некоторый заданный вектор.

Отметим, что при такой постановке задача оказывается поставленной не корректно в рамках классической теории дифференциальных уравнений так как функция $L(\cdot)$ вообще говоря может не быть дифференцируемой. В рамках же теории обобщенных функций, обобщенная производная от функции $L(\cdot)$ будет существовать, но не будет корректно определено произведение $\dot{L}(t)X(t)$ как произведение обобщенной функции на разрывную. В силу указанных причин встает вопрос о построении необходимой теории для определения решений задач, подобных задачи (1), (2). Исследованием этого вопроса занимались многие авторы, предлагая различные подходы, которые можно охарактеризовать следующим образом: переход к интегральному уравнению, где интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса, Перрона — Стилтьеса и др. (см., например, [1]), аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами [2], формализации данной задачи в рамках теории обобщенных функций [3, 4]. Вообще говоря указанные подходы могут приводить к различным результатам, однако, в работе [5] показано, что эти подходы можно охватить одним, основанным на исследовании предельного поведения решений представлений исходной задачи в виде соответствующих конечно-разностных с осреднением задач (см. [5, 6]). При этом, если существует предел решений таких конечно-разностных с осреднением задач, то будем называть его ассоциированным решением исходной задачи. В рамках данного подхода соответствующая краевой задачи (1), (2) конечно-разностная с осреднением задача может быть записана в следующем виде

$$X_n(t+h_n) - X_n(t) = (L_n(t+h_n) - L_n(t)) \cdot X_n(t) + F_n(t+h_n) - F_n(t), \tag{3}$$

$$M_1 X_n(t)|_{t\in[0,h_n)} + M_2 X_n(m_b h_n + t)|_{t\in[0,h_n)} = Q_n(t)|_{t\in[0,h_n)}. \tag{4}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $n \in \mathbb{N}$, $h_n \in \mathbb{R}$, $h_n < b$ — произвольные фиксированные числа, m_b — целая часть числа b/h_n, $Q_n : [0, h_n) \to \mathbb{R}^p$ — некоторая заданная вектор-функция, $L_n(t) = ((L^{ij} * \rho^{ij}{}_n)(t)) = (\int_0^{1\setminus\gamma^{ij}(n)} L^{ij}(t+s)\rho^{ij}{}_n(s)\,ds)$, $\rho^{ij}{}_n(t) = \gamma^{ij}(n)\rho(\gamma^{ij}(n)t)$, $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\rho \subset [0,1]$, $\int_0^1 \rho(s)\,ds = 1$; γ^{ij} — некоторая монотонная функция, $\gamma^{ij}(n) \to \infty$, при $n \to \infty$. $F_n(t) = ((F^i * \bar\rho_n)(t)) = (\int_0^{1\setminus n} F^i(t+s)\bar\rho_n(s)\,ds)$ $\bar\rho_n(s) = \bar\rho(ns)$, $\bar\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\bar\rho(s) \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\bar\rho \subset [0,1]$, $\int_0^1 \bar\rho(s)ds = 1$.

Обозначим также $B_n(t,s)$ как конечно-разностную с осреднением фундаментальную матрицу, соответствущей уравнению (3), $H_{B_n}(\tau) = M_1 + M_2 B_n(m_b h_n + \tau, 0)$,

$$X(t) = H_B^{-1}(Q_0 - M_2 \int_0^b B(b,s)dF(s)) + \int_0^t d^c L(s)X(s) +$$
$$+ \sum_{\mu_l \leqslant t} (\phi_l(X(\mu_l-),1) - \phi_l(X(\mu_l-),0)) + F(t) - F(0), \tag{5}$$

где $\phi_l(\cdot,\cdot)$ — решение вспомогательной системы уравнений

$$\phi_l(X(\mu_l-),u) = X(\mu_l-) + \int_{(0,u])} d\eta(s)\phi_l(X(\mu_l-),s-),$$

${}^cL(t)$ — непрерывная составляющая $L(t)$, μ_l — точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_l) = L(\mu_l) - L(\mu_l-)$, $\eta(s) = (\eta^{ij}(s))_{i,j=\overline{1,p}}$, причем $\eta^{ij}(s) = \Delta L^{ij}(\mu_l)s$, если $h_n = o(1/\gamma^{ij}(n))$, и $\eta^{ij}(s) = \Delta L^{ij}(\mu_l)H(s-1)$, если $1/\gamma^{ij}(n) = o(h_n)$. $B(t,s)$ — фундаментальная матрица, $H_B = M_1 + M_2 B(b,0)$.

В докладе обсуждены условия, при которых решение краевой задачи (3), (4) существует и единственно, а также показано, что ассоциированные решения задачи (1), (2) имеют вид (5) при выполнении условий следующей теоремы.

Теорема. *Пусть* $L^{ij}(t)$, $i,j = \overline{1,p}$ *— непрерывные справа функции ограниченной вариации,* $\det(H_B) \neq 0$ *и* $\forall n \in \mathbb{N}$ *и* $\forall \tau \in [0,h_n)$ $\det(H_n(\tau)) \neq 0$. *Тогда существу-*

ет такая последовательность $Q_n(\tau)$, *для которой выполняется* $\|Q_n(\tau)-Q_0\|_{L_1}\to$ $\to 0$ *при* $n\to\infty$, *что при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$, *так что* $\forall i,j=\overline{1,p}$ *либо* $h_n=$ $=o(1/\gamma^{ij}(n))$, *либо* $1/\gamma^{ij}(n)=o(h_n)$ *справедливо* $\|X_n(t)-X(t)\|_{L_1}\to 0$, *где* $X_n(t)$ *— решение конечно-разностной задачи* (3), (4), *а* $X(t)$ *— решение системы* (5).

Литература

1. Das P.S., Sharma R.R. *Existence and stability of measure differential equations* // Czech. Math. J. 1972. V. 22. № 1. P. 145–158.

2. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы: модели и приложения.* М.: Наука, 1991.

3. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. *Теория обобщенных функций: секвенциальный подход.* М.: Мир, 1976.

4. Colombeau J. F. *New generalized functions and multiplication of distributions.* Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1984.

5. Лазакович Н.В. *Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов* // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. № 5. С. 23—27.

6. Yablonski A.L., *Differential equations with generalized coefficients* // Nonlinear Analysis. 2005. V. 63. P. 171–197.

7. Лазакович Н.В., Яблонский О.Л., Хмызов А.К. *Системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55. № 2. С. 5—9.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА — ПАДЕ

А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко

Пусть $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$ — произвольные различные действительные числа, а $n_0=n$, $n_1=\alpha n$, $n_2=\beta n$, где n,α,β — натуральные числа (α,β — фиксированы).

В данной работе исследуются асимптотические свойства недиагональных многочленов Эрмита — Паде первого рода $\{A^p_{n_p}(z)\}_{p=0}^2$ для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^2$. Такие многочлены при подходяще замене переменной являются решениями некоторых дифференциальных уравнений второго порядка и представляются в виде (см. работы [1–3])

$$A^p_{n_p}(z)=\frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i}\int\limits_{C_p}\frac{e^{\xi z}\,d\xi}{[\varphi(\xi)]^n},\quad p=0,1,2,$$

где $\varphi(\xi)=\xi(\xi-\lambda_1)^\alpha(\xi-\lambda_2)^\beta$, а C_p — граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга.

Обозначим через x_j, $j=1,2$ — нули производной функции $\varphi_0(\xi)=\xi(\xi-\lambda_1)(\xi-\lambda_2)$. Считаем, что G — такая односвязная область, что $\{x_j\}_{j=1}^2\subset G\subset\mathbb{C}\backslash\{\lambda_p\}_{p=0}^2$. Тогда по теореме о монодромии функция

$$S(\xi)=-\ln\varphi(\xi),$$

для которой $S(x_1)=-\ln|\varphi(x_1)|$ в случае $\varphi(x_1)>0$ и $S(x_1)=-\ln|\varphi(x_1)|-i\pi$ в случае $\varphi(x_1)<0$, однозначным образом аналитически продолжается в G (здесь и далее i — мнимая единица). Значения $S(\xi)$ в области G вычисляются по формуле

$$S(\xi)=-\ln|\varphi(\xi)|-i[ImS(x_1)+\Delta_\gamma\arg\varphi(\xi)],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки x_1 и ξ, а $\Delta_\gamma\arg\varphi(\xi)$ — приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть* $n_0 = n,\ \ n_1 = \alpha n,\ \ n_2 = \beta n.$ *Тогда для каждого фиксированного числа* $z \in \mathbb{C}$ *при* $n \to \infty$

$$A^0_{n_0}(z) = B_n(x_1)e^{x_1 z}\left(1 + O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^1_{n_1}(z) = B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_1)z}\left(1 + O\left(1/n\right)\right) - B_n(x_1)e^{(x_1-\lambda_1)z}\left(1 + O\left(1/n\right)\right),$$

$$A^2_{n_2}(z) = -B_n(x_2)e^{(x_2-\lambda_2)z}\left(1 + O\left(1/n\right)\right),$$

где $B_n(x_j) = (2\pi n S''(x_j))^{-1/2}\, e^{nS(x_j)},\ \ j = 1, 2.$

Отметим, что в частном случае, когда $\beta = 1,$ сформулированная теорема доказана в работе [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь

Литература

1. Hermite C. *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* /Ё Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. № 21. P. 289–308.

2. Астафьева А.В., Старовойтов А.П. *Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций* // Мат. сб. 2016. Т. 207. № 6. С. 3–26.

3. Старовойтов А.П., Кечко Е.П. *О некоторых свойствах аппроксимаций Эрмита — Паде для набора экспоненциальных функций* // Комплексный анализ и его приложения. Сб. статей. Тр. МИАН. 2017. Т. 298. С. 338–355.

4. Driver K.A., Temme N.M. *On polynomials related with Hermite — Padé approximants to the exponential function* // J. Approx. Theory. 1998. № 95. P. 101–122.

СИСТЕМНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

И.В. Трифонова

Эволюционные операторы [1] находят широкое приложение в исследовании динамических систем. Представим нелинейную систему с двумя входными и выходными сигналами в виде оператора: $y = (y_1(t), y_2(t)) = A(x_1(t), x_2(t)),$ где $x_1(t), x_2(t)$ — входные сигналы системы; $y_1(t), y_2(t)$ — выходные сигналы системы; A — нелинейный оператор. Выходные сигналы определяются суммой ряда интегралов

$$y_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_1(\tau)\cdot x_1(t-\tau)d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q_2(\tau_1,\tau_2)\cdot x_1(t-\tau_1)\cdot x_1(t-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\cdot x_1(t-\tau_1)\cdot x_1(t-\tau_2)\cdot x_1(t-\tau_3)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 + \ldots,$$

$$y_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)d\tau + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_2(\tau_1,\tau_2)\cdot x_2(t-\tau_1)\cdot x_2(t-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\cdot x_2(t-\tau_1)\cdot x_2(t-\tau_2)\cdot x_2(t-\tau_3)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 + \ldots,$$

где $q_1(t_1), q_2(t_1,t_2), \ldots, q_k(t_1,t_2,\ldots,t_k), \ldots, p_1(t_1), p_2(t_1,t_2), \ldots, p_k(t_1,t_2,\ldots,t_k), \ldots$ — последовательность ядер. Для произвольного числа a определим пространство X_a — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на всей числовой оси с носителем на $[a,+\infty)$. Рассмотрим пространство X, которое является объединением X_a. Оно представляет пространство всех финитных функций слева бесконечно дифференцируемых на числовой оси (снабженное топологией индуктивного предела). Под эволюционным оператором понимают оператор A, действующий из X в пространство X, такой, что если носитель функции $x(t)$ содержится на числовой полуоси $[t_0,+\infty)$, то и носитель функции $Ax(t)$ содержится на полуоси $[t_0,+\infty)$.

Эволюционный оператор первой кратности — это оператор A, который задается равенством

$$Ax = \sum_n S_n(a_n * x^{\otimes n}), \quad (x \in X).$$

Оператор A второй кратности действует из пространства X^2 в пространство X^2 вектор-функций на числовой оси так, что если носитель вектор-функции $x(t)$ содержится $[t_0,+\infty)^2$ то и носитель вектор-функции $Ax(t)$ содержится на $[t_0,+\infty)^2$ и определяется следующим образом:

$$Ax = \sum_{n_1,n_2} S_{n_1+n_2}(a_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})).$$

Системы эволюционных операторов позволяют исследовать нелинейные многомерные эволюционные системы с любым конечным количеством входных и выходных сигналов. Такой подход позволяет применять указанные операторы для анализа динамических систем, описываемых нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями [2]. Пусть $S = \{A^1, A^2, \ldots, A^r\}$ — система эволюционных операторов кратности u, действующих из пространства X^u в пространство X, где X — пространство финитных слева бесконечно дифференцируемых функций на числовой оси.

Системным нелинейным эволюционным оператором системы S называется оператор A, действующий из пространства X^u в пространство X^r, определяемый следующим равенством:

$$A(x_1,x_2,\ldots,x_u) = (A^1(x_1,x_2,\ldots,x_u), A^2(x_1,x_2,\ldots,x_u), \ldots, A^r(x_1,x_2,\ldots,x_u))$$

для любых $x_1, x_2, \ldots, x_u \in X$.

В случае, когда $r = u = 2$, когда система $S = \{A^1, A^2\}$ состоит из двух эволюционных операторов второй кратности, получим

$$A^1(x_1,x_2) = \sum_{n_1,n_2} S_{n_1+n_2}(a^1_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})),$$

$$A^2(x_1,x_2) = \sum_{n_1,n_2} S_{n_1+n_2}(a^2_{n_1,n_2} * (x_1^{\otimes n_1} \otimes x_2^{\otimes n_2})),$$

где суммирование проводится по неотрицательным целым n_1, n_2, *таким, что* $n_1 + n_2 = n > 0$, $a^1_{n_1,n_2}$, $a^2_{n_1,n_2}$ — *обобщенные функции с носителями на гипероктанте* $[0,+\infty)^n$, $x_1, x_2 \in X$, $x = (x_1,x_2) \in X^2$, $S_{n_1+n_2}$ — *оператор сокращения переменных* n*-го порядка,* $*$ — *операция свертки.*

Тогда, накладывая на систему довольно слабые требования, предъявляемые к оператору A, выходные сигналы системы можно описать функциональным рядом. В отличие от обычных рядов, определяющих статическую нелинейность, функциональные ряды характеризуют динамические нелинейные свойства и могут быть использованы для аппроксимации широкого класса нелинейных операторов, подобно разложению функции в степенные ряды.

Системы нелинейных эволюционных операторов первой и второй кратностей и соответствующих системных эволюционных операторов, в качестве ядер которых применяются двухкомпонентные векторнозначные обобщенные функции, позволят осуществлять анализ динамических систем вида

$$L_{11}x_1 + L_{12}x_2 = P_1(x_1, x_2) + f_1(t), \quad L_{21}x_1 + L_{22}x_2 = P_2(x_1, x_2) + f_2(t),$$

где $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$ — линейные дифференциальные операторы вида

$$Lx = x^{(n)} + \chi_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + \chi_1 x^{'} + \chi_0 x,$$

$P_1(x_1, x_2)$, $P_2(x_1, x_2)$ — многочлены двух переменных произвольного порядка

$$P(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{n^*} \sum_{m=0}^{m^*} c_{n,m} x_1^n x_2^m,$$

$f_1(t), f_2(t)$ — функции из пространства X.

Литература

1. Вувуникян Ю.М., Трифонова И.В. *Нелинейный системный оператор системы эволюционных операторов второй кратности с обобщенными импульсными характеристиками* // Весн. Гродзенскага дзярж. ўн-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2016. Т. 6. № 3. С. 63–69.

2. Трифонова И.В. *Системы двух нелинейных эволюционных операторов* // Весн. Гродзенскага дзярж. ўн-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2016. Т. 6. № 1. С. 46–54.

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Р.Н.Тураев

Квазилинейные параболические уравнения второго порядка лежат в основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в физике, механике, биологии, экологии и многих других областях знаний. Решению классической задачи для квазилинейных параболических уравнений второго порядка посвящено значительное количество работ, в которых разработаны методы получения априорных оценок, изучены разрешимость задач и проблемы, связанные с гладкостью решений.

Для квазилинейных параболических уравнений рассмотрен ряд задач со свободной границей с классическими граничными условиями. Требования современной науки и техники приводят к необходимости рассматривать нелокальные задачи (уравнение или граничное условие дается в нелокальной форме) [1, 2]. В настоящей работе изучается нелинейная нелокальная задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leqslant T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leqslant N$,

$s(t)-$ удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D=\{(t,x):0<$ $<t\leqslant T,\ \ 0<x<s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x)=a(u_x)u_{xx}(t,x)+b(t,x),\quad (t,x)\in D \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям:

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0)=\psi(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,0)=u(t,s(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t))=\mu(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5}$$

При исследовании задачи используем идеи и результаты работ [1–3]. Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $s(t)$, $u(t,x)$ и их производных. Для этого поставленную задачу (1)–(5) сведем к эквивалентной задаче (типа Стефана) для функций $s(t)$, $u_x(t,x)$.

Обозначим $u_x(t,x)=v(t,x)$. Тогда из задачи (1)–(5) получим следующую задачу:

$$v_t(t,x)=a(v)v_{xx}(t,x)+a'_v(v)v(t,x)v_x(t,x)+b_x(t,x),\quad (t,x)\in D \tag{6}$$

$$v(0,x)=\varphi'(x),\quad 0\leqslant x\leqslant s_0, \tag{7}$$

$$v(t,0)=\psi(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{8}$$

$$v(t,s(t))=\mu(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{9}$$

$$\mu(t)\dot{s}(t)=\alpha a(\psi(t))v_x(t,0)-a(\mu(t))v_x(t,s(t))+\alpha b(t,0)-b(t,s(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{10}$$

Далее на основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы, доказывается единственность решения. В итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи при помощи метода неподвижной точки Шаудера [1–3].

Литература

1. Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. *Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения.* // Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2012. № 26. С. 99–106.

2. Тураев Р.Н. *Неклассическая задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения* // Уз МЖ. 2017. № 3. С. 8–16.

3. Кружков С.Н. *Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 329–346.

ЗАДАЧА ФЛОРИНА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Р.Н. Тураев, К.Н. Тураев

В современной науке наблюдается повышенный интерес к задачам для нагруженных параболических уравнений [1]. А задачи со свободной границей для нагруженного параболического уравнения относятся к категории малоизученных [2, 3].

В настоящей работе изучается нелокальная задача со свободной границей типа Флорина для нагруженного параболического уравнения.

Требуется найти пару функций $s(t)$, $u(t,x)$ такую, что непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена на отрезке $0 < t \leqslant T$, $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leqslant N$, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leqslant T,\ 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$a(t,x)u_{xx}(t,x) - u_t(t,x) = cu(t,x_0), \quad (t,x) \in D \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,x_0) = u(t,s(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача сводится к задаче типа Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее, устанавливаются априорные оценки для свободной границы решений и их производных в норме Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученный и первоначальной задачи при помощи метода неподвижной точки Шаудера [4, 5].

Литература

1. Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их применение.* М.: Наука, 2012.

2. Briozzo A.C., Tarzia A.D. *A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face* // App. Math. and Com. 2006. № 182. P. 809–818.

3. Briozzo A.C., Tarzia A.D. *Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face* // El. J. Differ. Equat. 2006. № 206. P. 1–16.

4. Кружков С.Н. *Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 329–346.

5. Тахиров Ж.О. *Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей.* Ташкент, 2014.

УРАВНЕНИЕ ВЕТВЛЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.И. Усков

Рассматривается уравнение

$$A\frac{dx}{dt} = (B + \varepsilon C)x(t,\varepsilon), \quad t \in [0,T], \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]. \tag{1}$$

где A, B, C — линейные операторы (вообще говоря, неограниченные), действующие в банаховом пространстве E, $\overline{\mathrm{dom}A} = \overline{\mathrm{dom}B} = \overline{\mathrm{dom}C}$; A, B, C.

Рассмотрен случай одномерного ядра Ф-оператора A. Для задачи Коши для уравнения (1) в работе [1] проанализировано поведение решения при $\varepsilon \to 0$ в терминах жордановых цепочек; в работе [2] построено асимптотическое разложения решения по параметру ε.

В работе [3] исследуется случай 0-НСЧ-оператора A [4] с многомерным ядром и жордановыми цепочками элементов, отвечающих нулевому собственному числу, различной длины. Приводится уравнение ветвления, позволяющее найти вид функций погранслоя разложения решения уравнения (1) [5]:

$$x(t,\varepsilon)=\bar{x}_m(t,\varepsilon)+\bar{v}_m(t,\varepsilon)+R_m(t,\varepsilon), \tag{2}$$

где $\bar{x}_m(t,\varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k x_k(t)$ — регулярная часть, $\bar{v}_m(t,\varepsilon)\sum_k \varepsilon^k v_k(\tau)$, $\tau = \tau(t,\varepsilon)$, — погранслойная часть, $R_m(t,\varepsilon)$ — остаточный член разложения (2).

Литература

1. Зубова С.П., Раецкая Е.В. *Исследование жесткости дескрипторной динамической системы в банаховом пространстве* // Проблемы мат. анализа. 2015. Вып. 79. С. 127–132.

2. Зубова С.П., Усков В.И. *Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай* // Мат. заметки. 2018. Т. 103. Вып. 3. С. 393–404.

3. Усков В.И. *О погранслое для дескрипторного уравнения с малым параметром* // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика: сб. науч. тр. по материалам междунар. заочной научно-практической конф. «Прикладная математика. Математическое моделирование систем и механизмов». Воронеж, 2017. № 10. Ч. 5 (36). С. 541–543.

4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* М.: Наука, 1965.

5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.* М.: Наука, 1973.

ПРИБЛИЖЕНИЕ МАТРИЧНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

А.П. Худяков, Е.В. Пантелеева, А.А. Трофимук

Пусть X — множество функциональных или стационарных квадратных матриц $A=A(t)$, $t\in\mathbb{R}$, фиксированного размера. Введем дифференциальный оператор

$$\widetilde{D}_{n+1}F(A)\equiv\widetilde{D}_{n+1}F(A;H_{n+1}H_n\cdots H_1)=\delta^{n+1}F[A;H_{n+1}H_n\cdots H_1],$$

где $\delta^{n+1}F[A;H_{n+1}H_n\cdots H_1]$ — дифференциал Гато порядка $n+1$ в точке $A\in X$ по направлениям $H_1,H_2,\ldots,H_{n+1}$ из X. Будем считать, что $\widetilde{D}_0F(A)\equiv F(A)$.

Обозначим $\omega(A)=(A-A_0)(A-A_1)\cdots(A-A_n)$, $l_k(A)=(A-A_0)\cdots(A-A_{k-1})\times$ $\times(A-A_{k+1})\cdots(A-A_n)$, $B_k=\widetilde{D}_m l_k(A_{n+1})$, $\widetilde{A}_k=B_kA_{n+1}+B_k^{-1}\sum_{i=1}^m\widetilde{D}_{m-1}l_k(A_{n+1};H_m\cdots$ $\cdots H_{i+1}H_{i-1}\cdots H_1)B_kH_i$, $k=\overline{0,n}$. Будем предполагать, что матрицы B_k, $l_k(A_k)$, $B_kA_k-\widetilde{A}_k$ $k=\overline{0,n}$, и $\widetilde{D}_m\omega(A_{n+1})$ обратимы.

Построим формулу приближенного вычисления дифференциала Гато порядка m $(1\leqslant m\leqslant n)$, от функции матричного аргумента $F(A)$ по ее значениям в узлах $A_0,A_1,\ldots,A_n$. Действительно, справедливо соотношение [1]

$$F(A)=\sum_{k=0}^n l_k(A)(B_kA-\widetilde{A}_k)[l_k(A_k)(B_kA_k-\widetilde{A}_k)]^{-1}F(A_k)+$$

$$+\,\omega(A)[\widetilde{D}_m\omega(A_{n+1})]^{-1}\widetilde{D}_mF(A_{n+1})+R_n(F;A), \tag{1}$$

где $R_n(F;A)$ – остаточный член интерполяционной формулы. Выражая из последнего равенства $\widetilde{D}_m F(A_{n+1})$, будем иметь

$$\widetilde{D}_m F(A_{n+1}) = \widetilde{D}_m \omega(A_{n+1})\omega^{-1}(A)\times$$
$$\times\left(F(A) - \sum_{k=0}^{n} l_k(A)(B_k A - \widetilde{A}_k)[l_k(A_k)(B_k A_k - \widetilde{A}_k)]^{-1}F(A_k) - R_n(F;A)\right). \tag{2}$$

Отбрасывая в (2) остаточный член $R_n(F;A)$ формулы (1), получим искомую приближенную формулу вычисления дифференциала Гато

$$\delta^m F[A; H_m H_{m-1}\cdots H_1] \cong$$
$$\cong \widetilde{D}_m \omega(A_{n+1})\omega^{-1}(A)\left(F(A) - \sum_{k=0}^{n} l_k(A)(B_k A - \widetilde{A}_k)[l_k(A_k)(B_k A_k - \widetilde{A}_k)]^{-1}F(A_k)\right).$$

Здесь матрица A должна быть такой, чтобы были обратимы входящие в формулу матрицы.

Достаточно полно теория матричного интерполирования изложена в монографии [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16М-055).

Литература

1. Худяков А.П., Пантелеева Е.В. *Приближение операторов, заданных на множествах функций и матриц, интерполяционными методами* // Междунар. научно-практическая конф. «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии». Брест: БрГУ им. А.С. Пушкина, 2017. С. 193–194.

2. Янович Л.А., Игнатенко М.В. *Основы теории интерполирования функций матричных переменных.* Мн.: Беларуская навука, 2016.

TWO-POINT WEIGHTED BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEVIATING ARGUMENTS

N. Partsvania

On a finite open interval $]a,b[$, we consider the differential equation

$$u''(t) = f(t, u(\tau(t))) \tag{1}$$

with two-point weighted boundary conditions of one of the following two types:

$$\lim_{t\to a}\frac{u(t)}{(t-a)^{\alpha}} = 0, \quad \lim_{t\to b}\frac{u(t)}{(b-t)^{\beta}} = 0 \tag{2}$$

or

$$\lim_{t\to a}\frac{u(t)}{(t-a)^{\alpha}} = 0, \quad \lim_{t\to b} u'(t) = 0, \tag{3}$$

where $f :]a,b[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ and $\tau :]a,b[\to]a,b[$ are continuous functions, while $\alpha\in[0,1[$ and $\beta\in[0,1[$ are constants.

Unimprovable in a certain sense conditions are established for the solvability and unique solvability of problem (1), (2) (of problem (1), (3)) which cover the case where the function f in the first argument has a nonintegrable singularity of arbitrary order at the points a and b (at the point a), i.e., the case, where

$$\int_a^b (t-a)^\lambda (b-t)^\lambda |f(t,x)|\,dt = +\infty \quad \Big(\int_a^b (t-a)^\lambda |f(t,x)|\,dt = +\infty\Big)$$

for any $x \neq 0$ and $\lambda > 0$.

In particular, the following theorems are proved.

Theorem 1. *Let there exist a continuous function* $g :]a,b[\to [0,+\infty[$ *such that*

$$\int_a^b \chi(t)(t-a)(b-t)g(t)\,dt + \int_a^b (1-\chi(t))(t-a)^{1-\alpha}(b-t)^{1-\beta}(\tau(t)-a)^\alpha (b-\tau(t))^\beta g(t)\,dt < b-a,$$

and in the domain $]a,b[\times\mathbb{R}$ *the condition*

$$\chi(t)[f(t,x)-f(t,y)]\,\mathrm{sgn}\,(x-y) - (1-\chi(t))|f(t,x)-f(t,y)| \geqslant -g(t)|x-y| \qquad (4)$$

is satisfied, where $\chi(t)=1$ *for* $\tau(t)=t$, *and* $\chi(t)=0$ *for* $\tau(t)\neq t$. *If, moreover,*

$$\int_a^b (t-a)^{1-\alpha}(b-t)^{1-\beta}|f(t,0)|\,dt < +\infty,$$

then problem (1), (2) *has one and only one solution.*

Theorem 2. *Let there exist a continuous function* $g :]a,b[\to [0,+\infty[$ *such that*

$$\int_a^b [\chi(t)(t-a) + (1-\chi(t))(t-a)^{1-\alpha}(\tau(t)-a)^\alpha] g(t)\,dt < 1,$$

and in the domain $]a,b[\times\mathbb{R}$ *condition* (4) *holds. If, moreover,*

$$\int_a^b (t-a)^{1-\alpha}|f(t,0)|\,dt < +\infty,$$

then problem (1), (3) *has one and only one solution.*

ON EXISTENCE OF THE MARCHAUD FRACTIONAL DERIVATIVE

S.V. Rogosin, M.V. Dubatovskaya

The Marchaud fractional derivative is defined for arbitrary values of α, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, by the following formula (see [1, Sec. 5.6]):

$$(\mathbb{D}^\alpha_\pm f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)A_l(\alpha)} \int_0^\infty \frac{(\Delta^l_{\pm t} f)(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt, \quad l > \mathrm{Re}\,\alpha > 0, \qquad (1)$$

where

$$A_l(\alpha)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}k^{\alpha},\quad (\Delta^l_{\pm t}f)(x)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^{k}\binom{l}{k}f(x\mp kt).$$

In particular, this formula has the form

$$(\mathbb{D}^{\alpha}_{\pm}f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt,\quad \text{for}\ \ 0<\operatorname{Re}\alpha<1, \tag{2}$$

$$(\mathbb{D}^{\alpha}_{\pm}f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)(2-2^{\alpha})}\int_0^{\infty}\frac{f(x)-2f(x-t)+f(x-2t)}{t^{1+\alpha}}\,dt,\quad \text{for}\ \ 1<\operatorname{Re}\alpha<2. \tag{3}$$

Definition (1) is a kind of the regularization of the construction appeared due to formal replacement of the positive parameter α in the Liouville fractional integral

$$(I^{\alpha}_{-}f)(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

by the negative one. The approach by Marchaud was to introduce such a regularization which generalizes the Liouville fractional derivative (see [2, 3]). Since the obtained integral $(I^{-\alpha}_{-}f)(x)$ is in general divergent, it is necessary to give a proper sence to this integral.

Sufficient condition for existence of the integral in (1) are presented, e.g., in [1]. In particular, it was shown [1, Theorem 5.9] that the Marchaud derivative (1) is defined on bounded function whose derivative of order $[\alpha]$ locally satisfies the Hölder condition with the exponent $\lambda>\alpha-[\alpha]$.

In our report we discuss another class of functions provided an existence of the Marchaud derivative.

Theorem. *Let the function $f(x)$ be uniformly approximated on the semi-axes $(-\infty,a]\subset\mathbb{R}$ by the sum of exponents*

$$f(x)\approx\sum_{j=1}^{N}C_j e^{\lambda_j x},\quad 0\leqslant\lambda_1<\ldots<\lambda_N,\quad C_j\in\mathbb{C}, \tag{4}$$

then there exists the Marchaud derivative (1) *of this function for each $x\in(-\infty,a]$.*

Sketch of the proof. To describe the idea of the proof we calculate the Marchaud derivative of the function $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$, in the case $0<\alpha<1$:

$$(\mathbb{D}^{\alpha}_{\pm}e^{\lambda t})(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{e^{\lambda x}-e^{\lambda(x-t)}}{t^{1+\alpha}}\,dt=\frac{\alpha e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{1-e^{-\lambda t}}{t^{1+\alpha}}\,dt.$$

The last integral is surely convergent. Calculating it by parts

$$(\mathbb{D}^{\alpha}_{\pm}e^{\lambda t})(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{e^{\lambda x}}{(-\alpha)}(1-e^{-\lambda t})t^{-\alpha}\Big|_{t=0}^{t=\infty}-\frac{e^{\lambda x}}{(-\alpha)}\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}t^{1-\alpha-1}\,dt\right\}$$

we obtain $(\mathbb{D}^{\alpha}_{\pm}e^{\lambda t})(x)=\lambda^{\alpha}e^{\lambda x}$.

Calculations for the large values of the parameter α can be performed similarly.

Remark 1. The idea of considering the class of functions (4) goes back to the initial work by Liouville (see [3]).

Remark 2. The Marchaud derivative is useful at the study of certain problems for fractional oder operators, see e.g., [4].

Acknowledgement. The work is partially supported by Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, grant F17MS-002.

References

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* London: Gordon & Breach Science Publishers, 1993. [Extended edition of the Russian original, Nauka i Tekhnika: Minsk (1987)]

2. Marchaud A.P. *Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variable réelles* // J. Math. Pure et Appl. 1927. V. 6. P. 337–426.

3. Rogosin S.V., Dubatovskaya M.V. *Letnikov vs Marchaud. A survey on two prominent constructions of fractional derivatives* // Mathematics. 2018. V. 6. № 1. P. 3. doi:10.3390/math6010003

4. Bucur C., Ferrari F. *An extension problem for the fractional derivative defined by Marchaud* // Fract. Calc. Appl. Anal. 2016. V. 19. № 4. P. 867–887.

TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORM WITH THE GAUSS HYPERGEOMETRIC FUNCTION IN THE KERNEL AS TWO-DIMENSIONAL MODIFIED G-TRANSFORM

O.V. Skoromnik, S.A. Shlapakov

Two-dimensional integral transform

$$\boldsymbol{x}^{\sigma}\int\limits_{0}^{\boldsymbol{x}}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})^{c-1}}{\Gamma(c)}F\left(a,b;c;1-\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{t}}\right)\mathbf{t}^{\omega}f(\boldsymbol{t})\,d\boldsymbol{t}\quad(\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0})\tag{1}$$

is studied. Here $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$; $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$, $c=(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$, $0<c_j<1$ $(j=1,2)$; $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}^2$; $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{R}^2$; $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})^{c-1}=\prod_{j=1}^{2}(x_j-t_j)^{c_j-1}$; $\int_0^{\boldsymbol{x}}=\int_0^{x_1}\cdot\int_0^{x_2}$; $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}_{++}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2,\ x_1>0,\ x_2>0\}$; the expression $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{t}$ means $x_1\geqslant t_1, x_2\geqslant t_2$; $d\boldsymbol{t}=dt_1\cdot dt_2$ [1–3]; $F(a,b;c;1-\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t})$ is a function of the form:

$$F(a,b;c;1-\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t})=\prod_{j=1}^{2}{}_2F_1(a_j,b_j;c_j;1-x_j/t_j),\quad {}_2F_1(a_j,b_j;c_j;1-x_j/t_j)\quad(j=1,2)$$

are the Gauss hypergeometric functions [4].

It is proved that the considered construction (1) can be represented as the integral transform involving two-dimensional analogue of Meijer's G-function as kernel [5]. On the basis of this representation mapping properties such as the boundedness, the range, the representation and inversion of the considered transform in the weighted space of Lebesgue measurable functions $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2)$ on $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}_{++}$ such that

$$\|f\|_{\overline{v},\overline{r}}=\left\{\int\limits_{R^1_+}x_2^{v_2r_2-1}\left[\int\limits_{R^1_+}x_1^{v_1r_1-1}|f(x_1,x_2)|^{r_1}\,dx_1\right]^{r_2/r_1}dx_2\right\}^{1/r_2}<\infty$$

$(\overline{r}=(r_1,r_2),\ 1<\overline{r}<\infty,\ \overline{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2)$ are established.

This work generalize the results obtained in [6] for one-dimentional case.

References

1. Samko S.G., Kilbas A.A, Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications.* Yverdon: Gordon & Breach, 1993.
2. Brychkov Y.A., Glaeske H.J., Prudnikov A.P., Tuan V.K. *Multidimensional Integral Transformations.* Philadelphia: Gordon & Breach, 1992.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland Mathematics Studies 204. Amsterdam: Elsevier, 2006.
4. Erdelyi A., Magnus W., Oderhettinger F., Tricomi F.G. *Higher Transcendential Functions.* V. 1. New York: McGraw-Hill, 1953.
5. Kilbas A.A., Saigo M. *H -Transforms. Theory and Applications.* Boca Raton, Florida: Chapman and Hall, 2004.
6. Килбас А.А., Скоромник О.В. *$L_{\nu,r}$ -теория интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах* // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фунд. науки. 2007. № 3. С. 42–50.

ON RIEMANN — LIOUVILLE FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

H.T. Tuan, A. Czornik, J.J. Nieto, M. Niezabitowski

In recent years, fractional-order differential equations have attracted increasing interests due to their applications in time-dependent materials, modeling anomalous diffusion and processes with long range dependence, complex networks and allometric scaling laws [1]. In this paper, we present some results for existence of global solutions and attractivity for multidimensional fractional differential equations involving Riemann — Liouville derivative. Firstly, by using a Bielecki type norm and Banach fixed point theorem, we prove a Picard — Lindelof type theorem on the existence and uniqueness of solutions. Next, applying the properties of Mittag — Leffler functions, we describe the attractivity of solutions to some classes of Riemann — Liouville linear fractional differential systems.

We will study Riemann — Liouville fractional differential systems

$$D^{\alpha}_{0+}x(t) = f(t, x(t)), \tag{1}$$

where $\alpha \in (0,1)$ and D^{α}_{0+} is the Riemann–Liouvile derivative of order α, $f : [0,\infty) \times \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ is a given function and $x : (0,\infty) \to \mathbb{R}^s$ is the solution. The initial value problem for (1) we define as a problem of finding a solution that fulfills the condition

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1-\alpha}x(t) = x_0 \tag{2}$$

for an a priori given $x_0 \in \mathbb{R}^s$.

The next theorem contains the main result of this paper regarding the existence and uniqueness of solution.

Theorem 1. Suppose that the function $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ is continuous and there exists a bounded (or continuous) function $L : [0,\infty) \to [0,\infty)$ such that

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L(t)\|x - y\|$$

for all $t \in [0,\infty)$ and $x, y \in \mathbb{R}^s$, then the equation (1) with the initial condition (2) has a unique solution in the space $C_{1-\alpha}([0,\infty), \mathbb{R}^s)$ for all $x_0 \in \mathbb{R}^s$.

Consider the following special form of the equation (1)

$$D^{\alpha}_{0_+}x(t) = Ax(t) + Q(t)x(t) + g(t), \tag{3}$$

where $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$, $Q : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{s\times s}$ and $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}^s$ are continuous functions.

Definition. The equation (3) is called globally attractive if for any $x_0 \in \mathbb{R}^s$ the solution $\varphi(\cdot, x_0)$ of (3) tends to zero at infinity.

The next two theorems contain the main results of this paper regarding the attractivity of the equation (3).

Theorem 2. Consider the equation (3). Suppose that $\sigma(A) \subset \Lambda^s_\alpha$, the matrix valued function $Q : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{s\times s}$ satisfies

$$\sup_{t\geqslant 0} t^{1-\alpha} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |||E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)Q(\tau)||| \tau^{\alpha-1}\, d\tau < 1,$$

and $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}^s$ is continuous and

$$\sup_{t\geqslant 0} t^{1-\alpha} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)g(\tau)\|\, d\tau < \infty.$$

Then for any $x_0 \in \mathbb{R}^s$, we have $\varphi(\cdot, x_0) \in C^0_{1-\alpha}([0,\infty), \mathbb{R}^s)$. In particular, the equation (3) is globally attractive.

Theorem 3. Assume that $\sigma(A) \subset \Lambda^s_\alpha$, $Q : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{s\times s}$ is continuous and satisfies

$$\lim_{t\to\infty} |||Q(t)||| = 0,$$

and $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}^s$ is continuous such that

$$\sup_{t\geqslant 0} t^{1-\alpha} \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|E_{\alpha,\alpha}((t-\tau)^\alpha A)g(\tau)\|\, d\tau < \infty.$$

Then for any $x_0 \in \mathbb{R}^s$, the solution $\varphi(\cdot, x_0)$ of (3) satisfies

$$\varphi(\cdot, x_0) \in C^0_{1-\alpha}([0,\infty), \mathbb{R}^s).$$

In particular, the equation (3) is globally attractive.

Aknowledgement. The research of H.T. Tuan is supported from the bilateral project between FWO Flanders and NAFOSTED Vietnam (FWO. 101.2017.01). The research of Adam Czornik and Michał Niezabitowski was done as parts of the projects funded by the National Science Centre in Poland granted according to decisions DEC-2017/25/B/ST7/02888 and DEC-2015/19/D/ST7/03679, respectively. The research of J.J. Nieto is partially supported by Agencia Estatal de Innovación (AEI) of Spain, project MTM2016-75140-P, cofinanced by FEDER and Xunta de Galicia, grants GRC 2015/004 and R 2016/022.

References

1. Diethelm K. *The Analysis of Fractional Differential systems.* Berlin: Springer-Verlag, 2010.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПЛОТНЕНИЯ ГРУНТА С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА НАПОРА И ЕЕ РЕШЕНИЯ

Ш. Алтынбеков

Как известно, одним из основных актуальных вопросов остается определение конечных осадок сооружений гидроэлектростанции и промышленно-гражданских зданий, обусловленных консолидацией грунтов с учетом влияния начального градиента напора. Сформулирована математическая постановка квазилинейной краевой задачи консолидации неоднородных грунтов с учетом влияния начального градиента напора.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_\nu(x_3)\bigg(\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg(K_1\bigg(\frac{\partial H}{\partial x_1} - i_0\bigg)\bigg) + \frac{\partial}{\partial x_2}\bigg(K_2\bigg(\frac{\partial H}{\partial x_2} - i_0\bigg)\bigg) +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\bigg(K_3\bigg(\frac{\partial H}{\partial x_3} - i_0\bigg)\bigg)\bigg) = -L(H), \quad (x,t) \in Q_\infty = G \times (\tau; +\infty), \tag{1}$$

$$H|_{t=\tau_1} = H_0(x), \quad x \in G, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \chi_1^{(1)}\bigg(\frac{\partial H}{\partial x_1} - i_0^*\bigg) - \chi_1^{(2)} H|_{x_1=-l_1} = \Psi_1(x_2, x_3, t), \\ \chi_1^{(3)}\bigg(\frac{\partial H}{\partial x_1} - i_0^*\bigg) - \chi_1^{(4)} H|_{x_1=l_1} = \Psi_2(x_2, x_3, t), \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \chi_2^{(1)}\bigg(\frac{\partial H}{\partial x_1} - i_0^*\bigg) - \chi_2^{(2)} H|_{x_1=-l_1} = \Psi_3(x_2, x_3, t), \\ \chi_2^{(3)}\bigg(\frac{\partial H}{\partial x_1} - i_0^*\bigg) - \chi_2^{(4)} H|_{x_1=l_1} = \Psi_4(x_2, x_3, t), \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \chi_3^{(1)}\bigg(\frac{\partial H}{\partial x_1} - i_0^*\bigg) - \chi_3^{(2)} H|_{x_1=-l_1} = \Psi_5(x_2, x_3, t), \\ \chi_3^{(3)}\bigg(\frac{\partial H}{\partial x_1} - i_0^*\bigg) - \chi_3^{(4)} H|_{x_1=l_1} = \Psi_6(x_2, x_3, t). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь функции $\Psi(x,t)$, $K_s(H)$, $s = 1, 2, 3$, и $i_0 = i_0(H)$ непрерывны и ограничены.

Исследованы вопросы существования, единственности и обоснованы методы решения для этой задачи.

Теорема 1. *Пусть положительные функции* $C_\nu(x_3)$, $K_s(x,t,H_0,H)$, $i_0(x,t,H_0,H)$ *принадлежат классу* $C^2(x \in G, 0 \leqslant \tau_1 \leqslant t < T < \infty) \bigcap C(Q_\infty)$, *функция* $H(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *в* Q_∞, *начальному условию* (2) *и граничным условиям* (3) – (5) *и* $L(H) > 0$ $(L(H) \leqslant 0)$ *в* Q_∞, *а функция* $H_0(x)$ *содержится в области определения оператора Лапласа. Тогда существует единственное решение задачи* (1) – (5). *Это решение непрерывно зависит от начальных и граничных данных, параметров меры ползучести, коэффициентов фильтрации, мгновенного уплотнения и бокового давления, а также свободного члена.*

В доказательстве используются принципы максимума и минимума, теорема разложения, признаки сходимости мажорируемых рядов, свойства меры ползучести, а также физически очевидный факт, заключающийся в том, что напор (или давление в поровой жидкости) перемещается лишь от мест с большим напором к местам с меньшим напором.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1, *а* $H(x,t)$ *— решение краевой задачи* (1)–(5) *и* $H_k(x,t)$, $k \in \mathbb{N}$, *— решение дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} = C_\nu(x_3)\left(K_{11}\frac{\partial^2 H_k}{\partial x_1^2} + K_{12}\frac{\partial^2 H_k}{\partial x_2^2} + K_{13}\frac{\partial^2 H_k}{\partial x_3^2}\right) + \Phi_{k-1}(x,t), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

удовлетворяющее начальным (2) *и граничным условиям* (3)–(5), *причем* $H > H_1$. *Тогда последовательность* H_k, $k \in \mathbb{N}$, *сходится к единственному решению* $H(x,t)$ *задачи* (1)–(5) *при* $k \to \infty$.

Функция $\Phi_{k-1}(x,t)$, $k \in \mathbb{N}$, в уравнении (6) непрерывна и ограничена.

В доказательстве используют принцип максимума и теорему сравнения. Задача (1)–(5) может быть решена различными методами численного анализа и уравнений математической физики. Здесь предпочтение отдается методу итерации, методу введения новой неизвестной функции, методу преобразования неоднородных граничных условий в однородные, методу Фурье, методу аппроксимации, методу введения новых переменных, методу разложения по собственным функциям.

Осадок грунтового основания, вызванный нагрузкой q, определяется равенством

$$s_k(t) = \frac{3\gamma\alpha_0}{1+\varepsilon_0}\int_0^h \frac{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}}{1 + 2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3}}(H_0(x) - H_k(x,t))\,dx_3. \tag{7}$$

Расчетная формула (7) дает возможность количественного и качественного анализа влияния начального градиента напора на процесс осадки грунтовых оснований.

ОБ ОДУ ПЯТОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИХ ИНВАРИАНТНОЕ ПРИСОЕДИНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

Г.А. Банару

В сентябре 2016 года исполнилось 90 лет со дня рождения известного отечественного геометра Николая Васильевича Степанова (1926–1991), профессора, доктора физико-математических наук [1]. Практически вся научная деятельность Н.В. Степанова была связана одним направлением — геометрической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Им опубликовано около полусотни значительных работ по этой тематике. Наиболее полно его результаты представлены в его докторской диссертации [2] (защита состоялась на мехмате МГУ им. М.В. Ломоносова), а также в двух обзорах [3, 4], которые чаще всего цитируются специалистами в данной области.

Рассмотрим одну из задач, поставленных Н.В. Степановым. Как известно [3], каждому классу уравнений, эквивалентных с точностью до точеной аналитической замены координат, соответствует вполне определенное расслоенное пространство со связностью, однозначно описываемое конкретными уравнениями структуры. Для некоторого уравнения определенного класса тензор кручения-кривизны структурных уравнений может быть равным нулю. В этом случае уравнения структуры определяют группу инвариантности данного уравнения. Например, так обстоит дело с дифференциальным уравнением пятого порядка

$$y^{(5)} = \frac{5y^{(3)}y^{(4)}}{y''} - \frac{40(y^{(3)})^3}{9(y'')^2}. \tag{1}$$

Интегральными кривыми уравнения (1) являются линии второго порядка общего вида (в этом можно убедиться непосредственной проверкой). Они, как хорошо известно, инвариантны относительно проективных преобразований [5]. Вот почему уравнению (1) соответствует плоский случай связности проективного пространства. Структурные уравнения проективного пространства представляют собой частный случай структурных уравнений пространства проективной связности — расслоенного пространства с проективной фундаментальной группой [6]. Поэтому естественно возникает вопрос о существовании класса обыкновенных дифференциальных уравнений пятого порядка, для которого соответствующее расслоенное пространство являлось бы пространством проективной связности. Уравнение (1), разумеется, должно содержаться в таком классе.

Ключом к решению данной задачи является доказанная в работе [7]

Теорема 1. *Следующие уравнения структуры определяют пространство проективной связности:*

$$D\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega^1_1 + \omega^2 \wedge (\omega^1_{11} - \frac{2}{3}\omega^2_{111}) + \Omega^1;$$

$$D\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^2_1 + \omega^2 \wedge \left(2\omega^1_1 - \omega^2_{11}\right) + \Omega^2;$$

$$D\omega^2_1 = \omega^1 \wedge \omega^2_{11} + \omega^2_1 \wedge (\omega^1_1 - \omega^2_{11}) + \omega^2 \wedge (2\omega^1_{11} - \omega^2_{111}) + \Omega^2_1;$$

$$D\omega^2_{11} = \omega^1 \wedge \omega^2_{111} + \omega^2_1 \wedge (3\omega^1_{11} - 2\omega^2_{111}) + \Omega^2_{11};$$

$$D\omega^2_{111} = \omega^2_{1111} \wedge \left(\frac{1}{2}\omega^2_1 - \omega^1\right) + \omega^2_{111} \wedge (2\omega^2_{11} - \omega^1_1) + 3\omega^2_{11} \wedge \omega^1_{11} + \Omega^2_{111};$$

$$D\omega^2_{1111} = \omega^2_{1111} \wedge (\omega^2_{11} - 2\omega^1_1) + 2\omega^2_{111} \wedge \omega^1_{11} + \Omega^2_{1111};$$

$$D\omega^1_1 = \omega^1 \wedge \omega^1_{11} + \omega^2_1 \wedge \left(\omega^1_{11} - \frac{2}{3}\omega^2_{111}\right) + \frac{1}{6}\omega^2_{1111} \wedge \omega^2 + \Omega^1_1;$$

$$D\omega^1_{11} = \omega^1_1 \wedge \omega^1_{11} + \omega^2_{1111} \wedge (\frac{1}{3}\omega^2_1 - \frac{1}{2}\omega^1) + \omega^2_{11} \wedge \left(\omega^1_{11} - \frac{2}{3}\omega^2_{111}\right) + \Omega^1_{11}. \tag{2}$$

Здесь Ω — формы кручения-кривизны, образованные внешними произведениями дифференциальных форм ω^1, ω^2 ω^2_1, ω^2_{11}, ω^2_{111}, ω^2_{1111}.

Окончательное решение поставленной задачи содержит

Теорема 2. *Обыкновенное дифференциальное уравнение пятого порядка*

$$y^{(5)} = \left(\frac{5y^{(3)}}{y'' + E} + D\right)y^{(4)} + B,$$

где $B = B(x, y, y', y'', y^{(3)})$; $D = D(x, y, y', y'')$; $E = E(x, y, y')$, допускает инвариантное присоединение к себе пространства проективной связности, описываемого уравнениями структуры (2) и имеющего линии второго порядка в качестве образующих элементов.

Литература

1. Банару Г.А. *О Николае Васильевиче Степанове и его геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 139. С. 3–8.

2. Степанов Н.В. *Дифференциально-геометрическая теория уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ // Дисс … д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1986.

3. Степанов Н.В. *Дифференциально-геометрическая теория уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1977. Т. 8. С. 47–66.

4. Степанов Н.В. *Геометрия дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1981. Т. 12. С. 127–164.

5. Глаголев Н.А. *Проективная геометрия.* 2-ое изд. М.: Высшая школа, 1963.

6. Картан Э. *Пространства проективной связности* // Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962. С. 119–153.

7. Банару Г.А. *О проективной связности, допускаемой обыкновенным дифференциальным уравнением пятого порядка* // Изв. вузов. Математика. 1996. № 2. С. 3–9.

О КОРРЕКТНОСТИ ПОСТАНОВОК МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ГЕМОДИНАМИКИ

В.И. Безяев, Н.Х. Садеков

Одной из основных задач моделирования гемодинамики является математическое определение течения крови в системе сосудов с учетом бифуркаций сосудов и их разнородности. Наиболее привлекательными и изученными являются квазиодномерные модели течения крови в сосудах (см., например, работы [1–3]). В настоящей работе исследована корректность постановок некоторых задач для линеаризованных уравнений гемодинамики на простейших графах.

Рассмотрим систему линеаризованных гемодинамических уравнений с постоянными коэффициентами для одного сосуда

$$u_t + \bar{u}u_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0, \quad p_t + \rho c^2 u_x + \bar{u}p_x = 0, \tag{1}$$

где постоянные $c = \sqrt{\bar{s}/(\rho\theta)}$ — скорость распространения пульсовой волны, ρ — плотность крови, $\bar{u}$, $\bar{p}$, $\bar{s}$ — некоторые фоновые значения скорости, давления и площади поперечного сечения сосуда соответственно, θ — коэффициент эластичности сосуда, а функции $u(x,t)$ и $p(x,t)$ — малые отклонения от фоновых значений ([1]).

Для этой системы можно найти точные решения задачи Коши, смешанной задачи на графе с одной вершиной и задач трансмиссии для произвольных конечных графов с одной вершиной [4]. В частности, для задачи трансмиссии на графе типа «пучок», состоящем из одной вершины и n направленных полуограниченных ребер, соединяющихся в ней, выполняется следующее утверждение.

Теорема. *Пусть на каждом ребре* $i = 1, 2, \ldots, n$ *графа справедлива система уравнений гемодинамики вида (1) и заданы начальные данные* $u_i(x_i, 0) = \phi_i(x_i)$, $p_i(x_i, 0) = \psi_i(x_i)$, *а в вершине графа выполняются линеаризованные условия сопряжения* $\sum_{i=1}^{n} z_i(\bar{s}_i u_i(0,t) + \theta_i \bar{u}_i p_i(0,t)) = 0$, $p_i(0,t) = p_j(0,t)$, $i \neq j$. *Здесь* $z_i = 1$, *если* i*-е ребро является входящим в вершину, и* $z_i = -1$, *если* i*-е ребро является выходящим из вершины. Будем предполагать, что* $\phi_i(x_i) \in C^1(z_i x_i \leqslant 0)$ *и* $\psi_i(x_i) \in C^1(z_i x_i \leqslant 0)$.

Тогда классическое решение данной задачи трансмиссии существует, единственно и выражается формулами

$$u_i(x_i,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho c_i}(\psi_i(v_i)-\psi_i(w_i))+\phi_i(v_i)+\phi_i(w_i)\right), & z_iw_i\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho c_i}\psi_i(v_i)+\phi_i(v_i)+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}k_{j\to i}\left(\dfrac{z_j}{\rho c_j}\psi_j\left(\dfrac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}}w_i\right)+\phi_j\left(\dfrac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}}w_i\right)\right)\right), & z_iw_i>0,\end{cases}$$

$$p_i(x_i,t)=\begin{cases}\dfrac{z_i\rho c_i}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho c_i}(\psi_i(v_i)+\psi_i(w_i))+\phi_i(v_i)-\phi_i(w_i)\right), & z_iw_i\leqslant 0\\ \dfrac{z_i\rho c_i}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho c_i}\psi_i(v_i)+\phi_i(v_i)-\displaystyle\sum_{j=1}^{n}k_{j\to i}\left(\dfrac{z_j}{\rho c_j}\psi_j\left(\dfrac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}}w_i\right)+\phi_j\left(\dfrac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}}w_i\right)\right)\right), & z_iw_i>0,\end{cases}$$

где $v_i=x_i-\lambda_i^{z_i}t$ *и* $w_i=x_i-\lambda_i^{-z_i}t$, $i=1,2,\ldots,n$, *а* $k_{j\to i}$ *— коэффициенты, вычисляемые по формулам*

$$k_{i\to i}=1-2\bar{s}_i\left(\rho c_i\sum_{m=1}^{n}\frac{\bar{s}_m(c_m-z_mu_m)}{\rho c_m^2}\right)^{-1},$$

$$k_{i\to j}=-2z_iz_j\bar{s}_i\left(\rho c_j\sum_{m=1}^{n}\frac{\bar{s}_m(c_m-z_mu_m)}{\rho c_m^2}\right)^{-1},\quad i\neq j.$$

Из этой теоремы и ее аналогов непосредственно следует корректность постановок указанных выше задач.

Доказано также существование классического решения смешанной задачи гемодинамики в одном ограниченном сосуде [4].

Литература

1. Абакумов Н.В. и др. *Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы* // Мат. моделирование. 2000. Т. 12. № 2. С. 106–117.

2. Мухин С.И. *Математическое моделирование гемодинамики.* Дисс. … д.ф.-м.н., М.: МГУ, 2008.

3. Барлукова А.М., Черевко АА., Чупахин А.П. *Бегущие волны в одномерной модели гемодинамики* // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55. № 2. С. 159–167.

4. Безяев В.И., Садеков Н.Х. *О некоторых задачах гемодинамики на графах* // Совр. математика. Фунд. направления. 2016. Т. 62. С. 5–18.

АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

М.М. Васьковский, И.В. Качан

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t=f(X_t)\,dB_t,\quad t\in[0,T],\tag{1}$$

где $f=(f_0,\dots,f_d)$, $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $i=0\dots,d$, — функции, имеющие ограниченные частные производные всех порядков, $B_t=(B_t^{(0)},\dots,B_t^{(d)})^{\text{т}}$, $B_t^{(0)}=t$, $B_t^{(i)}$, $i=1,\dots,d$, — независимые одномерные дробные броуновские движения с индексами Харста $H_i\in(1/3,1)$. Пусть $H=\min\{H_i:i=1,\dots,d\}$.

Под решением уравнения (1) с постоянным начальным условием $X_0=x\in\mathbb{R}^n$ будем понимать процесс X_t, $t\in[0,T]$, имеющий п.н. непрерывные по Гельдеру траектории любого порядка $\alpha<H$ и удовлетворяющий п.н. интегральному уравнению

$$X_t=x+\int\limits_0^t f(X_s)\,dB_s,\quad t\in[0,T],\tag{2}$$

где интеграл в правой части соотношения (2) понимается в потраекторном смысле [1, глава 4]. Решение X_t уравнения (1) с начальным условием $X_0=x$ называется единственным, если для любого другого решения Y_t уравнения (1) с начальным условием $Y_0=x$ имеет место равенство $P(X_t=Y_t\ \ \forall t\in[0,T])=1$.

При сделанных предположениях относительно функции f и процесса B_t уравнение (1) с начальным условием $X_0=x\in\mathbb{R}^n$ имеет единственное решение, которое будем обозначать $X_t^{(x)}$ [1, глава 8].

Для каждого $i=0,\dots,d$ определим дифференциальный оператор

$$D_f^{(i)}=\sum_{j=1}^n f_{ji}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

и в дальнейшем будем предполагать, что операторы $D_f^{(i)}$, $i=0,\dots,d$, попарно коммутируют.

Теорема. *Для любой функции $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, имеющей ограниченные частные производные всех порядков, функция $\varphi(t,x)=\mathbb{E}(g(X_t^{(x)}))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=D_f^{(0)}\varphi+\sum_{i=1}^d H_t t^{2H_i-1}(D_f^{(i)})^2\varphi,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

с начальным условием $\varphi(0,x)=g(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Литература

1. Friz P., Hairer M. *A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures.* Springer, 2014.

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА, ВЛАСОВА И ЛИУВИЛЛЯ: ЭНТРОПИЯ, ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОД ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В НЕГАМИЛЬТОНОВОЙ СИТУАЦИИ

В.В. Веденяпин, С.З. Аджиев, В.В. Казанцева

Мы рассмотрим важнейшие кинетические уравнения: уравнение Больцмана, которое описывает короткодействие и его важнейшее приложение — теорему о возрастании энтропии (H-теорема). H-теорему, впервые рассмотренную в работе [1] и обосновывающую сходимость решений уравнений типа Больцмана к максвелловскому распределению, Больцман связал с законом возрастания энтропии [2–17]. Мы рассматриваем обобщения уравнений химической кинетики, включающие в себя классическую и квантовую химическую кинетику [3]. Рассматриваем уравнение Власова, которое описывает дальнодействие с ее важнейшими приложениями для описания плазмы и крупномасштабных явлений во Вселенной [7–9]. Рассмотрим уравнение Лиувилля или неразрывности с приложениями к статистической механике [3–5] и в методе Гамильтона — Якоби [6–7, 12–13], а также в эргодической теории [3, 4, 14–16].

Литература

1. Больцман Л. *Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа* // Избр. тр. М.: Наука, 1984. С. 125–189.

2. Больцман Л. *О связи между вторым началом механической теории теплоты и теорией вероятностей в теоремах о тепловом равновесии* // Избр. тр. М.: Наука, 1984. С. 190–235.

3. Веденяпин В.В., Аджиев С.З. *Энтропия по Больцману и Пуанкаре* // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69. № 6 (420). С. 45–80; Russian Math. Surveys. 2014. V. 69. № 6. P. 995–1029.

4. Пуанкаре А. *Замечания о кинетической теории газов* // Избр. тр. Т. 3. М.: Наука, 1974.

5. Козлов В.В., Трещев Д.В., *Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем* // ТМФ. 2003. Т. 134. № 3. С. 388–400.

6. Козлов В.В. *Общая теория вихрей.* М.; Ижевск, 2013.

7. Веденяпин, В.В., Негматов, М.А., Фимин, Н.Н. *Уравнения типа Власова и Лиувилля, их микроскопические, энергетические и гидродинамические следствия* // Изв. РАН. Сер. мат. 2017. Т. 81. Вып. 3. С. 45–82.

8. Веденяпин, В.В. *О стационарных решениях уравнения Власова — Пуассона* // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 4. С. 777–780.

9. Веденяпин В.В. *О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача* // Докл. АН СССР. 1992. Т. 323. № 6. С. 1004–1006.

10. Веденяпин, В. В. *Временные средние и экстремали по Больцману* // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 2. С. 161–163.

11. Аджиев С.З., Веденяпин В.В. *Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 11. С. 2063–2074.

12. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. *Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона — Якоби* // Докл. РАН. 2012. Т. 446. № 2. С. 142–144.

13. Веденяпин В.В., Негматов М.А. *О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнений Власова и метод Гамильтона — Якоби* // Докл. РАН. 2013. Т. 449. № 5. С. 521–526.

14. Веденяпин В.В. *Кинетические уравнения Больцмана и Власова.* М.: Физматлит, 2001.

15. Аджиев С.З., Амосов С.А, Веденяпин В.В. *Одномерные дискретные модели для смесей.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44. № 3. С. 553–558.

16. Vedenyapin V., Sinitsyn A., Dulov E. *Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations.* Amsterdam, 2011.

17. Аджиев С.З., Веденяпин В.В., Волков Ю.А., Мелихов И.В. *Обобщенные уравнения типа Больцмана в газе* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 12. С. 2065–2078.

МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ: ПРОБЛЕМЫ ОБОСНОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

В.К. Горбунов

Производственные функции (ПФ) [1, 2] определяют выпуск сложных производственных объектов как функцию от количеств рационально используемых производственных факторов, представляемых в виде таких агрегатов как труд, основные фонды (производственный капитал), материалы и др. Основная часть исследований, представленных в мировой литературе, ограничивается двухфакторными ПФ

$$Y = F(K, L), \tag{1}$$

где стоимость выпуска Y определяется стоимостью используемых основных фондов K и затратами труда L. Несмотря на структурную простоту модели (1), эта модель, идентифицированная по статистическим данным, позволяет вычислять важные характеристики производства: средние и предельные эффективности факторов, факторные эластичности, предельную норму замещения и эластичность замещения. Функция (1) используется в моделях рационального производства (максимизации прибыли, минимизации издержек), а также в динамических макроэкономических моделях.

В 50–70-х гг. прошлого столетия рядом известных западных экономистов (Дж. Робинсон и др.) была высказана жесткая критика относительно понятия «производственный капитал» K и метода ПФ, которая вызвала острую дискуссию между сторонниками (Р. Солоу и др.) и противниками макроэкономических ПФ [3]. Основной аргумент противников — стоимость основных фондов плохо определяется из-за трудностей приведения различных компонент фондов сложного объекта к общим ценам, оценки степени их износа. К этому можно добавить, что в рыночных условиях обычно не все фонды загружены. Это особенно актуально для постсоциалистических экономик [4].

В наших работах [5–7] развивается позитивный подход к исследованию макроэкономических объектов, в рамках которого предложена математическая модель формирования эффективных фондов (ЭФ, [4]) объекта в по данным о валовом выпуске, производственным инвестициям и трудовым затратам $\{Y_t, I_t, L_t : t = \overline{0,T}\}$. Модель использует функцию (1) и уравнение динамики ЭФ, отражающее процесс освоения инвестиций I_t и амортизации фондов (коэффициент m_t) : $K_t = (1 - m_{t-1})K_{t-1} + I_t$, $t = \overline{1,T}$. На основе этой модели ставится задача одновременной оценки параметров ПФ и реконструкции ЭФ. Данная задача повышает адекватность метода ПФ, предполагающего рациональность использования факторов производства, и решает новую проблему — оценку ЭФ. Усложнение содержательной проблемы ведет к усложнению вычислительных проблем. Последнее преодолевается на основе привлечения дополнительной информации, отражающей специфику конкретного объекта.

Литература

1. Клейнер Г.Б. *Производственные функции: теория, методы, применение.* М.: Финансы и статистика, 1986.

2. Горбунов В.К. *О размерностной проблеме в экономике: производственная функция как «псевдо-черный ящик»* // Журн. экономической теории. 2014. № 1. С. 199–212.

3. Mishra S.K. *A Brief History of Production Functions.* MPRA Paper 5254. University Library of Munich: Germany, 2007.

4. Воскобойников И.Б. *О корректировке динамики основных фондов в российской экономике* // Экономич. журн. ВШЭ. 2004. № 1. С. 3–20.

5. Горбунов В.К., Львов А.Г. *Построение производственных функций по данным об инвестициях* // Экономика и мат. методы. 2012. Вып. 2. С. 95–107.

6. Горбунов В.К., Крылов В.П. *Оценка эффективности основного капитала предприятий методом производственных функций* // Экономика региона. 2015. № 3. С. 334-347.

7. Горбунов В.К., Львов А.Г. *Эффективные производственные фонды и производственные функции малого предпринимательства регионов* // Экономика региона. 2018 (в печати).

ВЕЙВЛЕТ-РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

А.Г. Дейцева, Н.В. Семенчук

На числовой прямой рассмотрим равномерную сетку

$$\omega_J = \{x_k = k/2^J,\ \ k \in \mathbb{Z}\}, \quad J \in \mathbb{Z}.$$

Через H_j обозначим пространство сеточных функций, определенных на ω_J. В работе [1] дано следующее

Определение. Оператор $D_J^n : H_J \to H_J$, определенный формулой

$$D_J^n f(x_k) = 2^{Jn} \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x_{k-m}) r_m^{(n)}, \quad J \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $x_k \in \omega_J$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$r_m^{(n)} = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x-m)\varphi(x)dx, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

φ — масштабирующая функция Койфмана, назовем *вейвлет-разностным оператором n-й производной.*

В работе [2] установлены свойства коэффициентов оператора дифференцирования (1), а также приведен алгоритм их нахождения. В работе [1] установлен порядок аппроксимации дифференциального оператора $T = d^n/dx^n$ вейвлет-разностным оператором D_J^n в каждой точке сетки ω_J.

Лемма. *Пусть φ — масштабирующая функция Койфмана порядка $L = 2K$, $K \in \mathbb{N}$, и интеграл (2) существует, причем $L > n$, $\varphi^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна на каждом интервале и $\varphi', \ldots, \varphi^{(n)} \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место тождество*

$$D_J^n(\Pi_J x^l) = \Pi_J(Tx^l), \quad l = \overline{0, L-1}, \quad J \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n < L, \tag{3}$$

где оператор D_J^n определен соотношением (1), а оператор проектирования Π_J — формулой $\Pi_J f(x) = f(x_k)$, $x_k \in \omega_J$.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы и функция $f \in C^L(\mathbb{R})$. Тогда справедлива оценка*

$$|D_J^n f(x_k) - f^{(n)}(x_k)| = o(2^{-J(L-n-1)}), \quad J \to \infty,$$

где $x_k \in \omega_J$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 < L$, оператор D_J^n задается равенством (3).

Использование вейвлет-разностных операторов позволяет разработать алгоритмы численного решения некоторых дифференциальных уравнений и систем, в том числе некоторых задач математической физики. В случае поиска периодических решений, вейвлет-разностный оператор может быть переопределен как показано в работе [3]. Также в [3] приведены примеры использования периодических койфлетов для поиска периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.

Литература

1. Дейцева А.Г. *Аппроксимация оператора дифференцирования в базисе койфлетов* // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2010. № 1. С. 99–103.

2. Дейцева А.Г. *Вейвлет-разностные операторы* // ACTUALSCIENCE. 2015. Т. 1. № 5. С. 78–80.

3. Deytseva A. *On the representation of the differential operator in bases of periodic coiflets and it's application* // 10th International Workshop, CASC 2007, Bonn, Germany, September 16–20, 2007, Proc. V.G. Ganzha, E.W. Mayr, and E.V. Vorozhtsov eds. Lecture Notes in Computer Science, 2007. V. 4770. P. 448–457.

МОДЕЛИ ЗАТУХАЮЩИХ ВСПЫШЕК ИНВАЗИОННЫХ ВИДОВ В УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.А. Дубровская, А.Ю. Переварюха

Проблема прогнозирования развития стремительного развития инвазионного процесса опасных чужеродных виднов актуальна в математической биологии. Таким видом может быть вредосная мтенофора, бабочка-листоветка, но может и опасный вирус. Такие организмы способны существенно изменять среду, или даже уничтожать, потому классические модели систем ОДУ не подходят для описания их динамики.

Рассмотрим новые уравнения. Предполагается, что ответ вторжению со стороны экологической среды или организма запаздывает, поэтому актуальны уравнения $\dot{x} = rx(t-h)f(x^k(t-h))$. В уравнении Хатчинсона впервые была предложена модификация $\dot{N} = rN(1-N/K)$ исходя из запаздывающего действия саморегуляции, что привело к уравнению с отклоняющимся по времени аргументом

$$\frac{dN}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K}\right). \qquad (1)$$

При малых значениях запаздывания τ динамика модели опишет затухающие колебания $N(t) \to K$. Установлена возможность возникновение бифуркации Андронова — Хопфа с появлением устойчивого предельного цикла $N_*(t,r)$, где нарушение критерия устойчивости состояния равновесия зависит от величины $r\tau$ [1]. Дальнейшее увеличение $r\tau > \pi/2$ вызывает переход в режим релаксационных колебаний. Однако быстрое увеличение амплитуды колебаний выраженной негармонической формы при малом временном промежутке между максимумами и стремящимися к нулю минимумами выводят такой релаксационный цикл за рамки допустимого экологического обоснования.

Модификацию с запаздыванием можно предложить и для модели с функцией $f(N) = \ln(K/N)$:

$$\frac{dN}{dt} = r_g N(t) \ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right). \qquad (2)$$

Уравнение (2) опишет актуальный для развития инвазии чужеродного вида сценарий развития единичной к почти катастрофической вспышки численности. Взрывообразный рост при исчерпании ресурсов приходит к малочисленному состоянию и далее медленно уравновешивается к не воздействующему на среду балансу K.

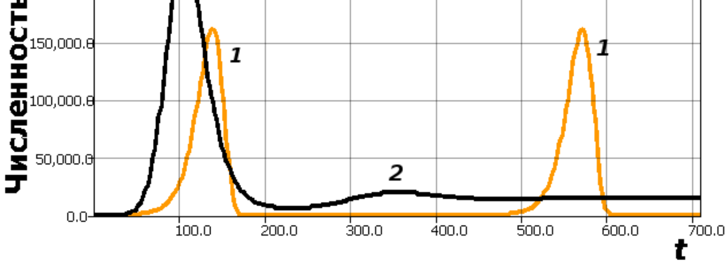


Рисунок. Сравнительная динамика уравнений (1) и (2)

На рисунке показано сравнение динамики уравнения (2) и уравнения Хатчинсона при одинаковых значениях $K, \tau, N(0)$ и $r = r_g + 10$. Для модели Хатчинсона видны два резких пика при стремящихся к нулю минимумах. При полном соответствии параметрам в сценарии траектория $N(t)$ уравнения Хатчинсона $N(0) < K$ монотонно стремится к K, повторяя модель Ферхюльста.

Описываемая уравнением (2) ситуация развивалась для интродуцированного для борьбы с инвазионным сорняком амброзией фитофага американского жука-зигограммы *Zigogramma suturalis* [2]. Популяция листоеда образовала волну, распространилась фронтом большой плотности, но далее прошла «бутылочное горлышко» и теперь трудно обнаруживается. Аналогично может описываться сохрание очага хронической инфекции в организме. При дополнении (2) сомножителем $N\sqrt[3]{(N-L)}$, аналогичным уравнению Базыкина:

$$\frac{dN}{dt} = r_g \ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right) N\sqrt[3]{(N-L)}, \tag{3}$$

то в (3) прохождения «бутылочного горлышка» после максимума не наблюдается, популяция чужеродного вида после катастрофической вспышки $N(t) = 0$. Аналогичный результат можно получить и более естественным средством, добавив в правую часть параметр независимой убыли $qN(t)$, который может отражать целенаправленное изъятие в целях борьбы с вселенцем:

$$\frac{dN}{dt} = r_g \ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right) - qN(t), \tag{4}$$

и это изменит качественный характер решения. В (4) после первой вспышки при инвазии следует следующая, действительно катастрофическая, но второй глубокий минимум становится последним — вычислительный эксперимент завершается, так как $N(t) < 0$ недопустимо.

Дополнения правой «репродуктивной» части запаздыванием $rN(t-\tau)f[N(t), N(t-\tau)]$ не несут экологического смысла. Модификация модели Хатчинсона (уже с приведенными коэффициентами) имеет вид

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f\Big(N(t-1)\Big), \tag{5}$$

где f — бесконечно дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд, например, $f(x) = (1-x)/(1+cx)$. Для уравнения (5) установлено существование единственного устойчивого релаксационного цикла неклассической формы. В такой модели коэффициент $c > 0$ становится еще одним параметром, определяющим характеристики цикла, при увеличении c сжимается амплитуда, но стремление

$$\min_{0<t<\mathfrak{T}_*} N_*(t,r) \to 0$$

сохраняется.

Можно считать такие уравнения моделями со смешанной регуляцией при наличии в уравнении $-N(t)N(t-\tau)$. Положим, что достижение значения численности K означает не уравновешивание, но непоправимую деградацию для среды обитания. Переход через мягкий порог $\mathfrak{H}$ имеет значение для скрытых от нас механизмов контроля внутрипопуляционной структуры. Тогда на динамику системы оказывает влияние отклонение $(\mathfrak{H} - N(t-\tau))$, притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной.

Предложенным методом нам в новых модификациях уравнений удалось рассмотреть три сценария развития инвазионного процесса активно размножающегося чужеродного вида, подавляющего конкурирующие с ним автохтонные группы. Предполагается, что вид активно оказывает давление на среду.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-37-00026, 17-07-00125).

Литература

1. Борздыко В.И. *Об исследовании популяционной модели Хатчинсона* // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 316—318.

2. Переварюха А.Ю. *Запаздывание в регуляции популяционной динамики — модель клеточного автомата* // Динамические системы. 2017. Т. 7. № 2. С. 157–165.

УСТОЙЧИВОСТЬ В ПЕРВОМ ПОСТНЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ЗВЕЗДЫ

О.Л. Зубко, А.П. Рябушко

Система дифференциальных уравнений для пробного тела A_3 в ограниченной круговой задаче трех тел в постньютоновском приближении при учете светового давления, когда одно из тяжелых тел A_1 массой m_1 — звезда, другое тяжелое тело A_2 массой m_2 — темное тело, третье тело A_3 массой m_3 — пробное тело, которое не оказывает влияния на движения тел A_1 и A_2, имеет вид

$$\frac{d^2\tilde{x}_3}{dt^2}+\frac{\gamma(m_1-A_{13})(\tilde{x}_3-x_1)}{[(\tilde{x}_3-x_1)^2+(\tilde{y}_3-y_1)^2]^{3/2}}+\frac{\gamma m_2(\tilde{x}_3-x_2)}{[(\tilde{x}_3-x_2)^2+(\tilde{y}_3-y_2)^2]^{3/2}}=0,$$

$$\frac{d^2\tilde{y}_3}{dt^2}+\frac{\gamma(m_1-A_{13})(\tilde{y}_3-x_1)}{[(\tilde{x}_3-x_1)^2+(\tilde{y}_3-y_1)^2]^{3/2}}+\frac{\gamma m_2(\tilde{y}_3-y_2)}{[(\tilde{x}_3-x_2)^2+(\tilde{y}_3-y_2)^2]^{3/2}}=0. \qquad (1)$$

где $\gamma=6,67\cdot10^{-8}$ г$^{-1}\cdot$ см$^{3}\cdot$ с$^{-2}$ — ньютоновская постоянная тяготения; t, с — время; $A_{13}=(k_3\sigma_3W_1r_0^2)/(\gamma m_3 c)$, г — редуцирующая масса звезды A_1, соответствующая телу A_3; k_3 — коэффициент отражения света телом A_3; σ_3, см^2 — площадь миделевого сечения тела A_3; $c=3\cdot10^{10}$ см $\cdot$ с$^{-1}$ — скорость света в вакууме; $r_0=|\overrightarrow{A_1A_2}|$; W_1 — звездная постоянная, являющаяся плотностью энергии электромагнитного (светового) излучения звезды A_1, приходящей за 1 с на 1 см^2 площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии r_0 от звезды.

Система (1) имеет точные стационарные решения (пять типов точек фотолибрации) (см.[1]):

$$\tilde{x}_3=\tilde{x}_3^0\cos\omega_0t-\tilde{y}_3^0\sin\omega_0t,\quad \tilde{y}_3=\tilde{x}_3^0\cos\omega_0t+\tilde{y}_3^0\sin\omega_0t, \qquad (2)$$

где $\tilde{x}_3^0$, $\tilde{y}_3^0$ — координаты этих точек фотолибрации, вращающиеся вокруг начала координат с угловой скоростью ω_0.

Задача. Найти условия устойчивости и неустойчивости решений (2) по Лагранжу, по Пуассону и по Ляпунову в первом приближении.

В результате решения задачи получены следующие выводы.

В поле притяжения звезды, когда $0<A_{13}\leqslant m_1$ все коллинеарные точки фотолибрации L_1^*, L_2^*, L_3^* неустойчивы по Лагранжу, по Пуассону и по Ляпунову в первом приближении.

Для треугольных точек фотолибрации L_4^* и L_5^* условие устойчивости по Ляпунову в первом приближении, по Лагранжу и по Пуассону принимает вид:

$$\left(\frac{m_1-A_{13}}{m_1}\right)^{2/3}>4-\frac{m^2}{9m_1m_2}. \qquad (3)$$

Если в неравенстве (3) заменить знак «больше» на знак «равно» или «меньше», то получим условие неустойчивости треугольных точек фотолибрации L_4^* и L_5^*.

Для систем тел Солнце — Юпитер — пробное тело и Солнце — Земля — пробное тело неравенство (3) выполнено при любых значениях редуцирующей массы звезды A_1, принадлежащих интервалу $0 < A_{13} < m_1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2020», подпрограмма «Микромир, плазма и Вселенная».

Литература

1. Рябушко А.П. и др. *Точки фотолибрации в небесной механике* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 60–66.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫХ МАШИН В ЛЕСОЗАГОТОВИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В.В. Игнатенко, Е.А. Леонов

Дифференциальные уравнения широко применяются в различных областях экономики при исследовании и проектировании технологических процессов, в том числе и в лесной промышленности. Поиск наиболее эффективных средств механизации лесосечных работ продолжается ускоренным темпом. При этом значительное внимание уделяется вопросу установления оптимального сочетания различных операций в лесозаготовительных машинах [1]. Проанализируем работу многооперационной лесозаготовительной машины с целью построения модели ее функционирования и нахождения некоторых рациональных параметров. Предположим, что цикл работы многооперационной машины можно разбить на n «элементарных циклов»: захват дерева, спиливание, отрыв от пня и пр.

Каждый элементарный цикл характеризуется индивидуальным временем обработки дерева с параметрами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Математические ожидания продолжительности элементарных циклов равны $T_1 = 1/\mu_1$, $T_2 = 1/\mu_2$, $\ldots$, $T_n = 1/\mu_n$ соответственно.

Функционирование многооперационной машины описывается системой дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dP_0}{dt} = \mu_n P_{2n} - \lambda P_0, \quad \frac{dP_{21}}{dt} = \lambda P_0 - (\lambda_{11} + \mu_1) P_{21} + \mu_{11} P_{11},$$

$$\frac{dP_{22}}{dt} = \lambda_{12} P_{12} - (\lambda_{12} + \mu_2) P_{22} + \mu_1 P_{21}, \quad \frac{dP_{11}}{dt} = \lambda_{11} P_{21} - \mu_{11} P_{11},$$

$$\frac{dP_{1n}}{dt} = \lambda_{1n} P_{2n} - \mu_{1n} P_{1n}. \tag{1}$$

полученных на основании размеченного графа состояний (рис. 1), где $P_0(t)$, $P_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots, n$, вероятности соответствующих состояний в момент времени t, S_0 — свободное состояние машины, нет сырья; $S_{21}, S_{22}, \ldots, S_{2n}$ — состояния обработки дерева по циклам; $S_{11}, S_{12}, \ldots, S_{1n}$ — состояния отказов, поступивших в период первого, второго и последующих элементарных циклов [2].

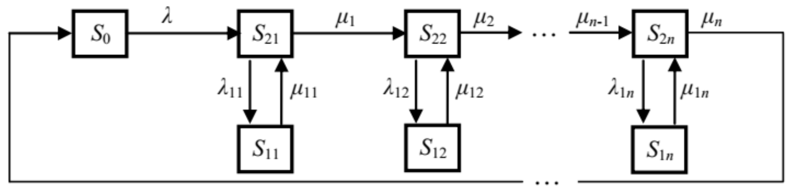


Рис. 1. Размеченный граф состояний.

К системе уравнений (1) добавляется условие нормировки $\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}+P_0=1$. Начальные условия для решения системы (машина исправна и свободна) $P_0(0)=1$, $P_{ij}=0$; $\mu_{11},\mu_{12},\ldots,\mu_{1n}$ — интенсивности восстановления работоспособности машины соответственно для первого, второго и последующих элементарных циклов; $\lambda_{11},\lambda_{12},\ldots,\lambda_{1n}$ — интенсивность отказов машины в период первого, второго и так далее элементарных циклов; λ — интенсивность поступления деревьев на обработку.

В установившемся режиме работы машины вероятности состояний $P_0(t)$, $P_{i,j}$, $i==1,2$, $j=1,2,\ldots,n$, не зависят от времени, т.е. постоянны, так называемые финальные вероятности. Система уравнений Колмогорова (1) преобразуется в алгебраическую систему, где в левой части вместо производных стоят нули к которой добавляется уравнение нормировки. Решая данную систему находим рассматриваемые финальные вероятности.

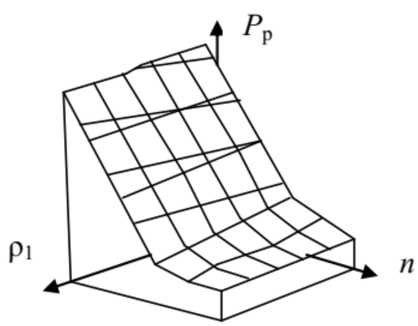


Рис. 2. Зависимость величины вероятности работы лесной машины от параметра n.

Анализ теоретических исследований (рис. 2) показал, что вероятность завершения производственного цикла машиной (например, валка дерева валочно-пакетирующей машиной) — P_n достигает наибольших значений при $n=1$ и $\rho_1=0$, где

$$\frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}}+\frac{\lambda_{12}}{\mu_{12}}+\frac{\lambda_{13}}{\mu_{13}}+\frac{\lambda_{14}}{\mu_{14}}=\rho_1.$$

Так как величина ρ_1 имеет степень малости большую, чем n $(n\gg\rho_1)$, то функция P_n чувствительна только к изменениям характеристики n, т. е. числа элементарных циклов. Таким образом установлено, что если машина выполняет одну операцию $(n=1)$, то $P_n=0{,}53$. В случае увеличения n до двух получаем $P_n=0{,}42$ и до трех — $P_n=0{,}20$. Начиная с $n=3$, убывание существенно замедляется и на каждое единичное увеличение n оно составляет $0{,}033$, т.е. основное падение величины вероятности успешного окончания рабочего цикла приходится на интервал $n=\{1,3\}$.

Проведенный анализ разработанной модели позволяет сделать вывод, что лесозаготовительные машины имеют наилучший показатель вероятности успешного завершения рабочего цикла при $n=1$ (валка дерева валочно-пакетирующей машиной). Эта вероятность снижается на $0{,}20$ при возрастании n до двух (очистка деревьев от сучьев и их раскряжевка процессором) и на $0{,}33$, если число циклов достигает трех (валка деревьев, их очистка от сучьев и раскряжевка харвестером). Следовательно, с точки зрения использования возможностей по производительности, предпочтительнее одно- и двухоперационные машины.

Литература

1. Игнатенко В.В., Турлай И.В., Федоренчик А.С. *Моделирование и оптимизация процессов лесозаготовок.* Мн.: БГТУ, 2004.

2. Леонов Е.А., Игнатенко В.В., Клоков Д.В. *Математическая модель работы рубильной машины с учетом ее технических отказов* // Тр. БГТУ. 2016. № 2. Лесная и деревообр. пр-ть. С. 40–44.

ПРИМЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.Я. Копать

Рассмотрим систему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) относительно функции $P(\vec{k},t)$. Данная система РДУ применяется для нахождения вероятностей состояний открытых сети массового обслуживания с разнотипными заявками, состоянием которой является вектор $\vec{k}$, каждая компонента которого может принимать целые значения от 0 до бесконечности. Поэтому число уравнений в системе равно бесконечности. Эта система имеет вид

$$\frac{dP(\vec{k},t)}{dt} = -\Lambda(\vec{k})P(\vec{k},t) + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})P(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},t) + $$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++}(\vec{k})P(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},t), \tag{1}$$

где

$$\Lambda(\vec{k}) = \lambda^{+}+\lambda^{-}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\mu_{ic}u(k_{ic}),$$

$$\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k}) = \delta_{0j}\delta_{s0}\left(\lambda^{-}p_{ic0}^{-}+\mu_{ic}(k_{ic}+1)\left(\sum_{s=1}^{r}k_{is}+1\right)^{-1}p_{ic0}\right)+\left(\mu_{ic}(k_{ic}+1)\left(\sum_{s=1}^{r}k_{is}+1\right)^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times\, p_{icjs}^{-}(1-u(k_{ic}))\right)+\delta_{0i}\delta_{c1}\lambda^{+}p_{0ic}^{+}+\mu_{ic}(k_{ic}+1)\left(\sum_{s=1}^{r}k_{is}+1\right)^{-1}p_{icjs}^{+}u(k_{ic}),$$

$$\Phi_{icjs}^{++}(\vec{k}) = \mu_{ic}(k_{ic}+1)\left(\sum_{s=1}^{r}k_{is}+1\right)^{-1}p_{icjs}^{-},\quad i,j=\overline{1,n},\quad s,c=\overline{1,r},$$

где $u(k_{ic})$ — единичная функция Хевисайда, δ_{ij} — символ Кронекера, λ^{-}, λ^{+}, p_{icjs}^{-}, p_{icjs}^{+}, μ_{ic} — некоторые постоянные, являются параметрами обслуживания. Их определения можно найти например в [1], I_{ic}-вектор размерности $n\times r$, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером $r(i-1)+c$, которая равна 1. Из (1) следует, что

$$P(\vec{k},t) = e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left(P(\vec{k},0)+\int_{0}^{t}e^{-\Lambda(\vec{k})x}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})P(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},x)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++}(\vec{k})P(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},x)\right)dx\right). \tag{2}$$

Пусть $P_q(\vec{k},t)$ — приближение $P(\vec{k},t)$ на q-й итерации, $P_{q+1}(\vec{k},t)$ — решение системы (1), полученное методом последовательных приближений. Тогда из (2) вытекает, что

$$P_{q+1}(\vec{k},t) = e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left(P(\vec{k},0)+\int_{0}^{t}e^{-\Lambda(\vec{k})x}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})P_q(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},x)+\right.\right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi^{++}_{icjs}(\vec{k})P_q(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},x)\Big)dx\Big). \qquad (3)$$

В качестве начального приближения возьмем стационарное решение системы (1) $P_0(\vec{k},t)=P(\vec{k})=\lim\limits_{t\to\infty}P(\vec{k},t),$ которое удовлетворяет соотношению

$$\Lambda(\vec{k})P(\vec{k})=\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi^{+-}_{icjs}(\vec{k})P(\vec{k}+I_{ic}-I_{js})+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi^{++}_{icjs}(\vec{k})P(\vec{k}+I_{ic}+I_{js})\Big).$$

Для последовательных приближений справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Последовательные приближения* $P_q(\vec{k},t),\ q=0,1,2,\ldots,$ *сходятся при* $t\to\infty$ *к стационарному решению системы уравнений* (1).

Теорема 2. *Последовательность* $P_q(\vec{k},t),\ q=0,1,2,\ldots,$ *построенная по схеме* (3), *при любом ограниченном по* t *нулевом приближении* $P_0(\vec{k},t), 0\leqslant P_0(\vec{k},t)\leqslant 1$ *сходится при* $q\to\infty$ *к единственному решению системы* (1).

Теорема 3. *Любое приближение* $P_q(\vec{k},t),\ q\geqslant 1,$ *представимо в виде сходящегося степенного ряда*

$$P_q(\vec{k},t)=\sum_{0}^{\infty}d^{+-}_{ql}t^l, \qquad (4)$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$d^{+-}_{ql}(\vec{k})=-\frac{(\Lambda(\vec{k}))^l}{l!}\Big(P(\vec{k},0)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^u u!}{\Lambda(\vec{k})^{u+1}}D^{+-}_{qu}(\vec{k})\Big),\quad l\geqslant 0,$$

$$d^{+-}_{q0}(\vec{k})=P_q(\vec{k},0),\quad d^{+-}_{0l}(\vec{k})=P_q(\vec{k},0)\delta_{l0},$$

$$D^{+-}_{ql}(\vec{k})=\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi^{+-}_{icjs}(\vec{k})d^{+-}_{ql}(\vec{k}+I_{ic}-I_{js})+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\Phi^{++}_{icjs}(\vec{k})d^{+-}_{ql}(\vec{k}+I_{ic}+I_{js})\Big).$$

Радиус сходимости степенного ряда (4) равен $+\infty$.

Теоремы доказываются аналогично как в [2]. Теорема 3 позволяет находить нестационарные вероятности состояний с помощью компьютера за приемлимое процессорное время.

Литература

1. Маталыцкий М.А., Копать Д.Я. *Анализ в переходном режиме сети с нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками различных типов* // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. № 42. С. 60–71.

2. Копать Д.Я., Маталыцкий М.А. *Анализ сети с положительными и отрицательными заявками различных типов в переходном режиме* // Вестн. Гродненского гос. ун-та. им. Я. Купалы Сер. 2. 2017. Т. 7. № 3. С. 150–162.

ТЕРМОСИЛОВОЙ ИЗГИБ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ

К.С. Курочка, Е.В. Комракова

Температурные воздействия на конструкционные материалы вызывают в них механические напряжения. Данное явление наиболее выражено в случае неравномерного нагрева. При этом возникающие в материалах механические напряжения сравнимы между собой и больше напряжений, вызываемых действием внешней силы.

Термосиловой изгиб пластины описывается системой уравнений [1]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu\Delta u + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u - \gamma\operatorname{grad} T + \rho F, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \gamma\frac{T}{c\rho}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} u = \alpha\Delta T, \tag{2}$$

где u, T — деформации и температуры в рассматриваемой точке пространства.

В конечноэлементной формулировке уравнения могут быть записаны в виде [2]

$$[K]\{\delta\} + [C]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\} + [M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\} + \{F\} = 0, \tag{3}$$

$$[C]\frac{\partial\{\Phi\}}{\partial t} + [K]\{\Phi\} = \{F\}, \tag{4}$$

где δ — деформации, а Φ — температуры в рассматриваемых точках пространства — времени.

Для учета температурной зависимости модулей упругости материалов слоев пластины воспользуемся теорией термоупругости Грина — Линдсея [3] и введем в рассмотрение время тепловой релаксации. Время тепловой релаксации вводилось для того, чтобы устранить бесконечную скорость распространения тепловых волн. Представленная теория была выбрана вследствие того, что не нарушается классический закон Фурье.

Уравнение состояния для теории обобщенной термоупругости с одним временем релаксации записывается в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda e\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \gamma(T - T_0)\delta_{ij}.$$

Уравнение теплопроводности, соотношение между напряжениями и перемещениями соответственно имеют вид

$$kT_{ii} = \rho C_E(\dot{T} + \tau_0\ddot{T}) + \gamma T_0(e_{i,j}^{\cdot} + \tau_0 e_{i,j}^{\cdot\cdot}) - (Q - \tau_0\ddot{Q}), \quad e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2,$$

где λ, μ — постоянные Ламе; ρ — плотность материала; C_E — удельная теплоемкость при постоянном напряжении; Q — мощность источника тепла на единицу массы; T — абсолютная температура; $T_0 = \delta_0\rho c_0^2/(\gamma_0 E_0) = (\delta_0/\alpha_T)(1-v)/(1+v)$ — исходная температура; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; $e = \varepsilon_{ii}$; ε_{ii} — компоненты тензора деформации; u_i — компоненты вектора перемещения; k — теплопроводность; τ_0 — время релаксации[4].

Уравнения (3) и (4) решались во временной области методом конечных элементов [5]. Сначала задавались исходные характеристики материала и граничные условия на поверхности пластины. Затем, для каждого интервала времени пересчитывались физические характеристики материала. Была проведена верификация разработанного программного продукта, путем сравнения получаемых результатов деформации с результатами выдаваемых стандартной программой ANSYS. Отличие результатов составляет не более 8 %.

Учитывая то, что рассмотренный алгоритм позволяет связать температуру окружающей среды, температуру пластины и внешние силы, действующие на пластину, получаемые численные результаты могут быть применены при разработке алгоритма работа прессового оборудования.

Литература

1. Старовойтов Э.И. *Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости.* Гомель: БелГУТ, 2001.
2. Liu G.R., Quek S.S. *Finite Element Method A practical course.* Prentice-Hall, 2003.
3. Chandrasekharaiah D.S. *Hyperbolic thermoelasticity a review of recent leterature* // Appl. Mech. Rew. 1998. V. 51. № 12. P. 705–729.
4. Othman M.I.A., Farouk R.M. *Generalized thermo-microstretch elastic medium with temperature dependent properties for different theories* // Engng. Anal. Boundary Element. 2010. V. 34. P. 229—237.
5. Румянцев, А.В.*Метод конечных элементов в задачах теплопроводности.* Калининград, 2010.
6. Самарский, А.А., Вабищев П.Н. *Вычислительная теплопередача.* М.: Едиториал УРСС, 2003.

К РАСЧЕТУ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ЗАДАЧЕ О ТЕПЛОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ

В.Н. Лаптинский, А.А. Романенко

При конструировании аппаратов и устройств, в которых тепловые режимы протекают по типу конвективного теплообмена, требуется выполнить соответствующие расчеты по оптимизации теплообмена. Хорошо известно (см., например, [1, с. 17]), каким образом силы трения, обусловленные малым коэффициентом вязкости (например, воды), оказывают сильное тормозящее влияние на процесс движения жидкости, с которым связано возникновение динамического и теплового пограничных слоев. Тепловой пограничный слой играет большую роль в теплопередаче между текущей средой и обтекаемым телом. Его аналитический расчет представляет собой непростую задачу.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [2, 3], на основе решения методом [3] задачи [4, с. 177]

$$\vartheta'' + \mathrm{Pr}\left[\frac{m+1}{2} f\vartheta' - \gamma f'(\vartheta - 1)\right] = 0, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \vartheta(\infty) = 1,$$

$$f''' + \frac{m+1}{2} ff'' + m(1 - f'^2) = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1,$$

получено эффективное (в смысле простоты и точности) приближенное аналитическое выражение для коэффициента теплопередачи α_x в задаче обтекания плоской пластины ламинарным потоком (в обозначениях, принятых в [4]):

$$\alpha_x = \lambda_0 \left(\frac{C}{\nu}\right)^{1/2} x^{(m-1)/2} \Bigg(\int_0^\infty \exp\Bigg[-\mathrm{Pr}\,\frac{(m+1)\lambda}{4} \times$$

$$\times \int_0^\xi (\xi - z)^2 \exp\left\{ -h\left(\frac{m}{\lambda} z + \frac{m+1}{12}\lambda z^3\right)\right\} dz \Bigg] d\xi \Bigg)^{-1}, \tag{1}$$

при этом значения параметров λ, h определяются по методике [2, 3].

Формула (1) использована для расчета оптимального режима охлаждения отливок в устройствах для литья методом направленного затвердевания.

Литература

1. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука, 1974.
2. Лаптинский В.Н., Романенко А.А. *К решению задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае* // XVI Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2014): тез. докл. междунар. науч. конф. 2014. Ч. 2. С. 65–66.
3. Лаптинский В.Н., Романенко А.А. *Модификация метода решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое. Часть 2.* Могилев: БРУ, 2014. (Препринт / ИТМ НАН Беларуси / № 37).
4. *Теория тепломассообмена. Учебник для вузов* / Под ред. А. И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979.

НАЧАЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ СИЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПАРАМЕТРА ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ф.Е. Ломовцев

Дифференциальное исчисление (сильный дифференциал Фреше и слабый дифференциал Гато) не по параметру, а по аргументу, на который действуют операторы в нормированных пространствах, строится по аналогии с дифференциальным исчислением Ньютона — Лейбница для числовых функций [1, с. 480–492]. Для вычисления (сильной, слабой) производной по параметру от линейных ограниченных операторов, зависящих или не зависящих от этого параметра, тоже применяется это дифференциальное исчисление. Вычисление производной по параметру t от линейных неограниченных замкнутых операторов $A(t)$, зависящих или не зависящих от t, но с не зависящей от t областью определения $D(A)$, осуществляется также с помощью классического дифференциального исчисления путем сведения таких операторов к ограниченным операторам. Но как только их области определения $D(A(t))$ зависят от параметра t, то такое дифференциальное исчисление не применимо в принципе.

Автором разработаны начала дифференциального исчисления по одномерному параметру t линейных неограниченных операторов $A(t)$ с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и их сильных расширений $\overline{A}(t)$, которое востребовано в исследованиях однозначной и устойчивой везде разрешимости нестационарных линейных смешанных задач для дифференциальных уравнений с частными производными [2–4]. Пусть $A(t) : H_0 \supset D(A(t)) \to H_0$ — линейные неограниченные замкнутые операторы в гильбертовом пространстве H_0 с плотными в H_0 и зависящими от t областями определения $D(A(t))$, $t \in [b, c]$. Существуют их сопряженные операторы $A^*(t) : H_0 \supset D(A^*(t)) \to H_0$ с зависящими от t областями определения $D(A^*(t))$, которые плотны в H_0, так как операторы $A(t)$, $t \in [b, c]$, замкнуты в H_0 [5, с. 25]. Пусть $W^+(t)$ — гильбертовы пространства, полученные наделением множеств $D(A^*(t))$ нормами графика $\langle v\rangle_{(t)} = (|A^*(t)v|_0^2 + |v|_0^2)^{1/2}$, где $(\cdot,\cdot)_0$ и $|\cdot|_0$ — скалярное произведение и норма в H_0. Пусть негативные пространства $W^-(t)$ — замыкания множества H_0 по негативным нормам $\langle f\rangle_{(-t)} = \sup\limits_{v\in W^+(t)} \{|(f, v)_0|/\langle v\rangle_{(t)}\}$, $t \in [b, c]$. Они изометричны сопряженным пространствам к позитивным пространствам $W^+(t)$, $t \in [b, c]$. Линейные операторы $A(t) : H_0 \supset D(A(t)) \to W^-(t)$, $t \in [b, c]$, непрерывны, так как $\langle A(t)u\rangle_{(-t)} \leqslant |u|_0$ $\forall u \in D(A(t))$, $t \in [b, c]$. Поэтому существуют их сильные расширения $\overline{A}(t) \in \mathfrak{L}(H_0, W^-(t))$, как сильные замыкания по непрерывности линейных операторов $A(t)$ с плотных множеств $D(A(t))$, $t \in [b, c]$, на все пространство H_0. К расширениям $\overline{A}(t)$, как линейным ограниченным операторам из H_0 в $W^-(t)$, нельзя применить известные понятия сильной (слабой) непрерывности по t в $t_0 \in \in [b, c]$ из функционального анализа, так как операторы $\overline{A}(t)$ принимают значения в переменной шкале пространств $\{W^-(t)\}$, которые могут оказаться несравнимыми при различных $t \in [b, c]$.

Выведены две формулы слабой производной по параметру сильных расширений операторов. В работе [4] есть первая формула слабой производной $A'(t_0)$ по параметру t в t_0 с областями определения $D(A'(t_0)) = D(A(t_0))$ от операторов $A(t)$, порожденных полуторалинейными формами $a(t; u, v) : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$, где H_1 и H_2 — некоторые гильбертовы пространства, плотные в H_0. Первую формулу слабой производной $\overline{A}'(t_0)$ по параметру t в t_0 с областью определения $D(\overline{A}'(t_0)) = H_0$ от сильных расширений $\overline{A}(t)$ операторов $A(t)$ дает

Теорема 1'. *Если линейные операторы $A(t)$ и порождающие их полуторалинейные формы $a(t; u, v) : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ удовлетворяют требованиям теоремы 1 работы [1], то для каждого элемента $h \in H_0$ в $W^-(t_0)$ существует значение слабой производной $\overline{A}'(t_0)$ от сильных расширений $\overline{A}(t)$ по t в $t_0 \in [b, c]$ на $h \in H_0$, равное*

$$\langle \overline{A}'(t_0)h, v(t_0)\rangle_{(t_0)} = \overline{a}_t(t_0; h, v(t_0)) \forall v(t_0) \in D(A^*(t_0)), \tag{1}$$

где полуторалинейные формы $\overline{a}_t(t; u, v) : H_0 \times W^+(t_0) \to \mathbb{C}$ — сужения по v с множества H_2 на пространство $W^+(t_0)$ и расширения по u с плотного множества H_1 на пространство H_0 форм $a_t(t; u, v) : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$, которые являются обычной производной по t от числовых значений взаимосопряженных и замкнутых по u форм $a(t; u, v) : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$.

Сформулирован алгоритм вычисления слабых производных порядка n от расширений.

1. Найти линейные операторы $A(t)$, порожденные заданными формами, путем интегрирования по частям этих форм максимально возможное число раз по x справа налево и применения классической теории обобщенных функций.

2. Вывести ассиметрический вид заданных форм, проинтегрировав по частям их максимально возможное число раз по x слева направо с помощью найденных граничных условий операторов $A(t)$.

3. Распространить ассиметрические формы предельным переходом по первой переменной с плотных множеств $D(A(t))$ на пространство $L_2(0, l)$ и согласно формуле (1) продифференцировать полученные формы n раз по t.

В теореме 2 работы [4] установлена вторая формула слабой производной $A'(t_0)$ по параметру t в t_0 с областями определения $D(A'(t_0)) = D(A(t_0))$ от заданных в явном виде операторов $A(t)$. Вторую формулу слабой производной $\overline{A}'(t_0)$ по параметру t в t_0 с областями определения $D(\overline{A}'(t_0)) = H_0$ от сильных расширений $\overline{A}(t)$ заданных в явном виде операторов $A(t)$ с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ имеет

Теорема 2'. *Пусть $\overline{D((A^{-1})'(t))} = H_0$, $t \in [b, c]$. Если $\forall t \in [b, c]$ на $R(A(t))$ существуют непрерывные обратные операторы $A^{-1}(t)$ из $W^-(t)$ в H_0 и слабая производная $(\overline{A^{-1}})'(t)$ по t от сильных расширений $\overline{A^{-1}}(t)$ является непрерывным оператором на $R(A(t))$ из $W^-(t)$ в H_0, т.е. существуют постоянные $c_{10}, c_{11} > 0$, что имеют место неравенства*

$$|A^{-1}(t)f(t)|_0 \leqslant c_{10}\langle f(t)\rangle_{(-t)}, \quad |(A^{-1})'(t)f(t)|_0 \leqslant c_{11}\langle f(t)\rangle_{(-t)} \quad \forall f(t) \in R(A(t)),$$

то при всех $t \in [b,c]$ *в* $W^{-}(t)$ *существует слабая производная по* t *от сильных расширений* $\overline{A}(t)$ *операторов* $A(t)$ *и для всех* $h \in H_0$ *она равна*

$$\langle \overline{A}'(t)h, v(t)\rangle_{(t)} = -((\overline{A}^{-1})'(t)\overline{A}(t)h, A^{*}(t)v(t))_0 \forall v(t) \in D(A^{*}(t)), \quad t \in [b,c]. \qquad (2)$$

Следствие. *В предположениях теоремы 2' в* $W^{-}(t)$ *имеют место представления*

$$\overline{A}'(t)h = -\overline{A}(t)(\overline{A}^{-1})'(t)\overline{A}(t)h \quad \forall h \in H_0, \quad t \in [b,c], \qquad (3)$$

$$\overline{A}'(t)u(t) = -\overline{A}(t)(A^{-1})'(t)A(t)u(t) \quad \forall u(t) \in D(A(t)), \quad t \in [b,c],$$

Замечание. Формула (3) обобщает известную формулу

$$A'(t)h = -A(t)(A^{-1})'(t)A(t)h, \quad h \in H_0,$$

первой сильной производной по t от линейного сильно непрерывного по t и ограниченного оператора $A(t)$ с ограниченной сильной производной $(A^{-1})'(t)$ обратного $A^{-1}(t)$ [6, с. 24].

Литература

1. Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1967.
2. Ломовцев Ф.Е. *Дифференцирование и интегрирование по параметру неограниченных переменных операторов с переменными областями определения* // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 1. С. 13–15.
3. Ломовцев Ф.Е. *Дифференцирование по параметру линейных операторов с зависящей от параметра областью определения* // Докл. РАН. 2012. Т. 445. № 6. С. 628–630.
4. Ломовцев Ф.Е. *Формула энергетической производной по параметру переменных линейных неограниченных операторов с переменными областями определения* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2016. Т. 24. № 1. С. 75–94.
5. Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1971.
6. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1967.

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ ДЕ СИТТЕРА, ОТРАЖЕНИЕ ОТ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО БАРЬЕРА

Е.М. Овсиюк, А.А. Голуб, А.Д. Коральков

Известно [1–7], что геометрия пространства Лобачевского действует на поля частиц со спинами $0, 1/2, 1$ как распределенное в пространстве идеальное зеркало. Глубина проникновения поля в такую среду растет с увеличением энергии поля, также эта величина зависит от радиуса кривизны пространства Лобачевского. В силу того, что модель Лобачевского входит составным элементом в некоторые космологические модели Вселенной, отмеченное свойство означает, что в таких моделях необходимо учитывать эффект наличия «космологического зеркала», которое эффективно должно вести к перераспределению плотности частиц в пространстве. Выполненный ранее анализ [1–7] предполагал статический характер геометрии пространства — времени. В настоящей работе проведено обобщение исследования для полей со спином $1/2$ в случае осциллирующей модели вселенной де Ситтера (анализ для случая скалярного поля см. в работе [8]). Уравнение Дирака решено в нестатических квазидекартовых координатах. Волновые функции частицы зависят от временной координаты нетривиальным образом, однако эффект полного отражения от эффективного потенциально барьера сохраняется и в нестатическом пространстве — времени, при этом он не зависит от времени.

В нестатической квазидекартовой метрике пространства анти де Ситтера

$$dS^2 = dt^2 - \cos^2 t[e^{-2z}(dx^2 + dy^2) + dz^2].$$

решения уравнения Дирака [9] ищутся в виде

$$\left(i\gamma^0 \cos t \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 e^z \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 e^z \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \cos t\right)\Psi = 0, \quad \Psi = e^{iax} e^{iby} \begin{vmatrix} f_1(t,z) \\ f_2(t,z) \\ f_3(t,z) \\ f_4(t,z) \end{vmatrix}.$$

После проведения процедуры разделения переменных с использованием диагонализации на решениях оператора спиральности упрощаем подстановку до следующего вида:

$$\Psi = e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \begin{vmatrix} F(t)f_1(z) \\ F(t)f_2(z) \\ G(t)f_1(z) \\ G(t)f_2(z) \end{vmatrix},$$

входящие сюда функции подчинены двум системам обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(i \cos t \frac{\partial}{\partial t} + p\right) G(t) - M \cos t F(t) = 0, \quad \left(i \cos t \frac{\partial}{\partial t} - p\right) F(t) - M \cos t G(t) = 0$$

и

$$e^z(a - ib) f_2(z) = \left(+ i\frac{d}{dz} + p\right) f_1(z), \quad e^z(a + ib) f_1(z) = \left(- i\frac{d}{dz} + p\right) f_2(z).$$

Собственные значения оператора спиральности 2-кратно вырождены по знаку: $+p$, $-p$. Разным собственным значениям оператора спиральности $+p$ и $(-p)$ отвечают комплексно сопряженные функции $F_{-p}(t) = [F_{+p}(t)]^*$. Решения обеих систем строятся в терминах вырожденных гипергеометрических функций [10].

Показано, что для построения решений, описывающих эффект отражения от эффективного барьера, созданного геометрией пространства, нужно использовать комбинаций решений с противоположными спиральностями. В частности выделенные решения по переменной z ведут себя в асимптотической области $z \to -\infty$ согласно равенствам

$$H_\pm(z \to -\infty) \sim M_+ e^{+ipz} \pm M_- e^{-ipz}, \tag{1}$$

где (в предположении $A = +ip$)

$$M_+ = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} (2\sqrt{a^2+b^2})^{+ip}, \quad M_- = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} (2\sqrt{a^2+b^2})^{-ip}, \quad M_- = (M_+)^*.$$

Для решений (1) можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн $R = |M_-/M_+|^2 = 1$.

С учетом того, что функция $F(t)$ зависит от знака параметра спиральности $\pm p$, решения, описывающие полное отражение частиц от эффективного барьера в нестатическом случае, имеют следующие асимптотики в области $z \to -\infty$:

$$\Psi_\pm = e^{iax} e^{iby} \{F_{+p}(t) M_+ e^{+ipz}(z) \pm F_{-p}(t) M_- e^{-ipz}\}.$$

Литература

1. Red'kov V.M., Tokarevskaya N.G., Ovsiyuk E.M., George Spix J. *Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2009. V. 12. № 3. P. 232–250.

2. Овсиюк Е.М., Редьков В.М. *О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского* // Весцi Нац. акад. навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2009. № 4. С. 99–105.

3. Овсиюк Е.М., Веко О.В., Кисель В. В., Редьков В.М. *Новые задачи квантовой механики и уравнение Гойна* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. физико-математические науки. 2012. № 1 (141). С. 137–145.

4. Овсиюк Е.М., Веко О.В. *О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского* // Весн. Брэсцкага унiверсiтэта. Сер. 4. Фiзiка, матэматыка. 2011. № 2. С. 30–36.

5. Овсиюк Е.М., Веко О.В. *Решения типа плоских волн для частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 80–83.

6. Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Red'kov V.M. *On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry* // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2013. V. 16. № 4. P. 331–344.

7. Овсиюк Е.М., Веко О.В., Редьков В.М. *О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином 1/2* // Весцi НАН Беларуси. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 76–85.

8. Овсиюк Е.М. *Скалярное поле в осциллирующей Вселенной де Ситтера и отражение от космологического барьера* // Докл. НАН Беларуси. 2017. Т. 61. № 3. С. 18–25.

9. Редьков В.М. *Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца.* Мн.: Беларуская навука, 2009.

10. Бейтмен, Г., Эрдеи А. *Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра.* М.: Наука, 1973.

ОБ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ

Н.Я. Радыно

Предлагается подход, в терминах которого задачи классической механики могут быть описаны в терминах функций со значениями в гиперкомплексных числах [1, 2].

Утверждается, что систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение механической системы можно преобразовать таким образом, что решение, вновь полученной системы, будет эквивалентно решению одного дифференциального уравнения вида $dq = f(q)g(t)\,dt$, где q является гиперкомплексной переменной и характеризует состояние механической системы, t — время, f — функция гиперкомплексного переменного, g — функция времени.

Вся информация о движении системы содержится в переменной z и в функциях $f(z)$, $g(t)$. Во многих задачах $f(z) = az$, а вид $g(t)$ зависит от потенциальной энергии системы и начальных условий.

Так, одномерное движение свободной частицы может быть описано следующим образом: $dz = \varepsilon z\,dt$, $z(0) = \xi_1 + \varepsilon\xi_0$, z — дуальное число. Решение этой задачи $\ln z - \ln z(0) = \varepsilon t$, где $\ln z$ — логарифм дуального числа. Падение тела — задача Галилея — описывается уравнением $dz = (\varepsilon z + g)\,dt$, $z(0) = \xi_1 + \varepsilon\xi_0$, $g \in \mathbb{R}$, а малые колебания плоского маятника — уравнением $dz = i\omega_* z\,dt$, $z(0) = \xi_1 + i\omega_*\xi_0$, $\omega_* = \sqrt{g/l}$, z — комплексная переменная. Решение задачи $\ln z - \ln z(0) = i\omega_* t$. Движение нелинейного маятника описывается уравнением $dz = i\omega_* \,\mathrm{dn}\,(\omega_* t, \xi_1/(2\omega_*))z\,dt$, $z(0) = \xi_1$, а малые колебания сферического маятника — уравнением $dq = -\boldsymbol{i}q\,dt$, $q(0) = \xi$, q — кватернион. Решением этого уравнения является $\ln q - \ln \xi = -\boldsymbol{i}t$ или $q(t) = e^{-\boldsymbol{i}t}\xi$.

Задача Кеплера: $dq = -\boldsymbol{i}q\dfrac{\dot{E}(t)}{2}\,dt$, $q(0) = \sqrt{A} + \dfrac{v_0}{2\sqrt{A}}\boldsymbol{k}$, q — кватернион. Зависимость $E = E(t)$ — функция Кеплера, которая определяется из уравнения Кеплера $E - e\sin E = nt$.

Движение же твердого тела может быть описано в терминах бикватернионов и функций от бикватернионов [3].

Литература

1. Радыно Н.Я. *О функциях гиперкомплексного переменного и их применении к описанию движения* // Тр. XII Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2007). Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2007. С. 133–140.

2. Радыно Н.Я. *О функциях гиперкомплексного переменного и их применении к интегрированию систем дифференциальных уравнений в замкнутом виде* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2008. № 1. С. 83–88.

3.Радыно Н.Я. *Об описании движения твердого тела в терминах бикватернионов.* // Еругинские чтения-2014: тез. докл. междунар. конф. Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. Новополоцк, 2014. Ч. 2. С. 71–72.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПОЛЕ ШВАРШИЛЬДА, ТУННЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ

В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк

В работе [1] исследовалась безмассовая частица со спином $1/2$ в статическом пространстве — времени Шварцшильда [2]. В частности, в ней изучен процесс туннелирования такой частицы через эффективный потенциальный барьер на основе построения решений Фробениуса возникающего дифференциального уравнения второго порядка (см. также более ранние работы [3–11]). В настоящей работе анализ распространен на случай массивной спинорной частицы.

Содержание настоящей работы сводится к следующему. После разделения переменных в уравнении Дирака в статической метрике Шварцшильда получена система двух радиальных дифференциальных уравнений первого порядка. В результате задача приводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка. В обычной системе черепашьих координат r_* :

$$r_* = r + \ln(r-1), \quad r \in (1, +\infty), \quad r_* \in (-\infty, +\infty),$$

это уравнение приводится к виду

$$\left[\frac{d^2}{dr_*^2} + P^2(r;\epsilon, M, j)\right] f = 0,$$

где ϵ, j — квантовые числа энергии и полного момента частицы, M — масса частицы. Вид уравнения в областях около радиуса Шварцшильда и на бесконечности $(r \to 1, +\infty)$ допускает решения с асимптотиками, характерными для плоских волн:

$$r \to +1 (r_* \to -\infty), \quad f = e^{\pm i\epsilon r_*}, \quad r \to \infty (r_* \to +\infty), \quad f = e^{\pm i\sqrt{\epsilon^2 - M^2} r_*},$$

в области радиуса Шварцшильда масса M частицы эффективно себя не проявляет. Построены графики, описывающие поведение кривых эффективного импульса $P^2(r;\epsilon,M,j)$. Они указывают на то, что для части спектра решений имеем ситуацию возможного туннелирования частиц через запрещенную для классического движения область, двигаясь на этот барьер слева или справа (другими словами, изнутри или извне черной дыры). Анализ возникающего дифференциального уравнения проводится в переменной $\sqrt{1-1/r} = x$, $x \in (0,1)$. Учет ненулевой массы приводит к усложнению структуры сингулярных точек [12, 13], добавляется одна регулярная особенность в точке $x = \epsilon/M$:

$$[0_1, (+1)_2, (-1)_2, \infty_1] \quad \Rightarrow \quad [0_1, (+1)_2, (-1)_2, \infty_1; c_1].$$

Для найденного уравнения построены шестнадцать типов решений фробениусовского типа:

$$f(x) = (x+c)^\rho x^\gamma (x-1)^\alpha \exp\left(\frac{\beta}{x-1}\right)(x+1)^{\alpha'} \exp\left(\frac{\beta'}{x+1}\right) F(x).$$

Функции $F(x)$ удовлетворяют уравнению со следующей структурой (все параметры определяются заданием квантовых числе состояний частицы)

$$F'' + \left(\frac{n}{x} + \frac{n_1}{x-1} + \frac{n_2}{(x-1)^2} + \frac{n_3}{x+1} + \frac{n_4}{(x+1)^2} + \frac{n_5}{x+c}\right) F' +$$

$$+ \left(\frac{m}{x} + \frac{m_1}{x-1} + \frac{m_2}{(x-1)^2} + \frac{m_3}{x+1} + \frac{m_4}{(x+1)^2} + \frac{m_5}{x+c}\right) F = 0.$$

Решения для $F(x)$ строятся в виде степенных рядов, для них построены 8-членные рекуррентные соотношения. С применением метода Пуанкаре — Перрона доказана сходимость этих рядов в физической области изменения переменной $x \in (0,1)$.

Исследованные возможности поведения решений около особых точек $x = -1, 0, +1$ позволяют предложить восемь решений:

$$g_1(x) = e^{+2i\epsilon \ln x} e^{+i\epsilon \ln(x-1)} e^{+i\epsilon/(2(x-1))} e^{-i\epsilon \ln(x+1)} e^{+i\epsilon/(2(x+1))} (R_1(x) + iI_1(x)),$$

$$g_2(x) = e^{-2i\epsilon \ln x} e^{-i\epsilon \ln(x-1)} e^{-i\epsilon/(2(x-1))} e^{+i\epsilon \ln(x+1)} e^{-i\epsilon/(2(x+1))} (R_1(x) - iI_1(x));$$

$$g_3(x) = e^{+2i\epsilon \ln x} e^{-i\epsilon \ln(x-1)} e^{-i\epsilon/(2(x-1))} e^{+i\epsilon \ln(x+1)} e^{-i\epsilon/(2(x+1))} (R_3(x) + iI_3(x))),$$

$$g_4(x) = e^{-2i\epsilon \ln x} e^{+i\epsilon \ln(x-1)} e^{+i\epsilon/(2(x-1))} e^{-i\epsilon \ln(x+1)} e^{+i\epsilon/(2(x+1))} (R_3(x) - iI_3(x));$$

$$g_5(x) = e^{+2i\epsilon \ln x} e^{+i\epsilon \ln(x-1)} e^{+i\epsilon/(2(x-1))} e^{+i\epsilon \ln(x+1)} e^{-i\epsilon/(2(x+1))} (R_5(x) + iI_5(x));$$

$$g_6(x) = e^{-2i\epsilon \ln x} e^{-i\epsilon \ln(x-1)} e^{-i\epsilon/(2(x-1))} e^{-i\epsilon \ln(x+1)} e^{+i\epsilon/(2(x+1))} (R_5(x) - iI_5(x));$$

$$g_7(x) = e^{+2i\epsilon \ln x} e^{-i\epsilon \ln(x-1)} e^{-i\epsilon/(2(x-1))} e^{-i\epsilon \ln(x+1)} e^{+i\epsilon/(2(x+1))} (R_7(x) + iI_7(x)));$$

$$g_8(x) = e^{-2i\epsilon \ln x} e^{+i\epsilon \ln(x-1)} e^{+i\epsilon/(2(x-1))} e^{+i\epsilon \ln(x+1)} e^{-i\epsilon/(2(x+1))} (R_7(x) - iI_7(x)).$$

На основе построения специальных линейных комбинаций из этих решений возможен анализ прохождения частиц, падающих на барьер слева или справа.

Литература

1. Ovsiyuk, E.M., Veko O.V., Rusak Yu. A., Chichurin A.V., Red'kov V.M. *To Analysis of the Dirac and Majorana Particle Solutions in Schwarzschild Field* // NPCS. 2017. V. 20. № 1. P. 56–72.
2. Schwarzschild K. *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wissen. Phys. Math. 1916. K 1. S. 189–196.
3. Regge T., Wheeler John A. *Stability of a Schwarzschild Singularity* // Phys. Rev. 1957. Vol. 108, P. 1063–1069.
4. Brill D.R., Wheeler John A. *Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields* // Reviews of Modern Physics. 1957. V. 29. P. 465–479.
5. Bardeen J.M., Press W.H. *Radiation fields in the Schwarzschild background* // J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 7–19.
6. Hawking S.W. *Black hole explosions?* // Nature. 1974. V. 248. № 5443. P. 30–31.
7. Hawking S.W. *Particle creation by black holes* // Commun. Math. Phys. 1975. V. 43. P. 199 — 220.
8. Page D.N. *Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, non-rotating hole* // Phys. Rev. 1976. V. D13. P. 198–206.
9. Chandrasekhar S. *The Mathematical Theory of Black Holes.* Oxford: Oxford University Press, 1983.
10. Joel Smoller, Chunjing Xie. Asymptotic Behavior of Massless Dirac Waves in Schwarzschild Geometry // Annales Henri Poincaré. 2012. T. 13. № 4. P. 943–989.
11. Fiziev P. in: https://www. researchgate.net/profile/Plamen-Fiziev/publications
12. Ronveaux (ed.). *Heun's differential equation.* Oxford: Oxford University Press, 1995.
13. Slavyanov S.Yu., Lay W. *Special functions. A unified theory based on singularities.* Oxford, 2000.

ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ В СРЕДЕ В ПОСТНЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А.П. Рябушко, И.Т. Неманова, Т.А. Жур

В работах [1, 2] решены задачи: в постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности (ОТО) получено гравитационное поле газопылевого шара радиуса R, плотность которого $\rho = \text{const}$, с двумя притягивающими центрами (телами). В этом поле выведены уравнения движения центров и проведено интегрирование этих уравнений движения. Рассмотрен также вопрос о влиянии лобового сопротивления среды движущимся в ней телам. Сделаны численные оценки всех полученных релятивистских эффектов. В этой работе выясняется закон движения центра масс $\tilde{C}$ двух тел в среде в ПНП ОТО.

Рассмотрим случай круговых движений тел А и В *внутри* газопылевого шара. Это упрощает решение задачи и позволяет составить систему уравнений движения центра масс $\tilde{C}$:

$$\ddot{\tilde{c}}^i = \frac{\gamma^2\rho}{c^2(m_a+m_b)}\left[\frac{2\pi m_a m_b}{3r_0^2}(5|\vec{a}|b^i + 5|\vec{b}|a^i - 3|\vec{a}|a^i - 3|\vec{b}|b^i) + 5(m_a^2 I_{a0}^i + m_b^2 I_{b0}^i) - \right.$$
$$\left. - (m_a^2 I_{a1}^i + m_b^2 I_{b1}^i) - m_a m_b (I_{a2}^i + I_{b2}^i) + 5 m_a m_b (I_{a3}^i + I_{b3}^i)\right]. \quad (1)$$

Вычислив или осреднив входящие в систему (1) интегралы I_{av}^i, I_{bv}^i находим решение задачи Коши для системы (1) при начальных условиях $\tilde{c}^i(0) = 0$, $\dot{\tilde{c}}^i(0) = 0$:

$$\tilde{c}^1 = \frac{\pi\gamma^2\rho N}{c^2(m_a+m_b)\omega_0^2}(1-\cos\phi), \quad \tilde{c}^2 = \frac{\pi\gamma^2\rho N}{c^2(m_a+m_b)\omega_0^2}(\phi - \sin\phi), \quad \phi = \omega_0 t, \quad (2)$$

где величина $\omega_0 = \sqrt{\gamma(m_a + m_b)/r_0^3}$ является угловой скоростью обращения тел A и B по круговой орбите в ньютоновском приближении ОТО. Величина $N = \text{const}$ и определяется выражением

$$N = m_a^2\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2R}{|\vec{a}|} + \frac{R^2 + |\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2}\ln\frac{R - |\vec{a}|}{R + |\vec{a}|}\right) + \frac{4R^3}{(R + |\vec{a}|)^3}\right] -$$

$$- m_b^2\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2R}{|\vec{b}|} + \frac{R^2 + |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2}\ln\frac{R - |\vec{b}|}{R + |\vec{b}|}\right) + \frac{4R^3}{(R + |\vec{b}|)^3}\right] + 2m_a m_b(|\vec{a}| - |\vec{b}|)\left(\frac{4R^3}{3|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Согласно уравнениям (2) центр масс $\tilde{C}$ движется по циклоиде с базой на положительной части координатной оси Ox^2, если $N > 0$, и на отрицательной части, если $N < 0$. В случае $m_a = m_b$ имеем $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $N = 0$, т.е. центр масс покоится в начале координат. Если начальные условия расположения тел A и B изменить, то ориентация циклоиды изменится.

Рассмотрим систему двух тел A и B, близких по своим характеристикам к системе Солнце — Юпитер. Принимаем $m_a = 2 \cdot 10^{33}$ г, $m_b = 2 \cdot 10^{30}$ г, $|\vec{a}| = 7,78 \cdot 10^{10}$ см, $|\vec{b}| = 7,78 \cdot 10^{13}$ см; движения тел — круговые; плотность газопылевого шара $\rho = (10^{-18} \div 10^{-22})$ г $\cdot$ см$^{-3}$; его радиус $R = (10^{18} \div 10^{20})$ см. Скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см $\cdot$ с$^{-1}$, ньютоновская постоянная тяготения $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-83}$ см $\cdot$ г$^{-1}$ $\cdot$ с$^{-2}$. Расстояние между телами A и B $r_0 = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Для наблюдаемых планетарных туманностей, в частности, Солнечной системы, наиболее популярными являются следующие значения плотности $\rho = 10^{-21}$ г $\cdot$ см$^{-3}$ и радиуса $R = 10^{18}$ см. Тогда при указанных значениях величин имеем параметрические уравнения циклоиды

$$\tilde{c}^1 = -6,316 \cdot 10^{10}(1 - \cos\phi), \quad \tilde{c}^2 = -6,316 \cdot 10^{10}(\phi - \sin\phi). \tag{3}$$

За один оборот системы тел A — B, т.е. при изменении ϕ от 0 до 2π, что соответствует во времени примерно 12-ти годам, ее центр масс переместится по циклоиде (3) из начала координат в точку $\tilde{C}_1(0, -4 \cdot 10^{11})$, что должно вызвать «опускание» системы тел A — B примерно на расстояние $4 \cdot 10^{11}$ см относительно неподвижной системы координат x^1Ox^2.

Чтобы судить о законах движения тел A и B, нужно еще, кроме обсуждаемого здесь воздействия гравитационного поля газопылевого шара на движение тел, оценить релятивистские поправки в ПНП ОТО, которые найдены в [3]. Эти поправки Δa^i, Δb^i к ньютоновским координатам тел a^i, b^i при выполнении начальных условий — при $t = 0$ (или $\phi = 0$) эти поправки и их производные по времени (или по ϕ) равны нулю — имеют вид

$$\Delta a^1 = \frac{\gamma m_b[3,5]}{c^2(m_a + m_b)^2}(\cos\omega_0 t - 1), \quad \Delta a^2 = \frac{2\gamma m_b[3,5]}{c^2(m_a + m_b)^2}(\omega_0 t - \sin\omega_0 t), \tag{4}$$

$$\Delta b^1 = -\frac{\gamma m_a[3,5]}{c^2(m_a + m_b)^2}(\cos\omega_0 t - 1), \quad \Delta b^2 = -\frac{2\gamma m_a[3,5]}{c^2(m_a + m_b)^2}(\omega_0 t - \sin\omega_0 t), \tag{5}$$

где $[3,5] = 3m_a^2 + 5m_a m_b + 3m_b^2$. Для рассматриваемой системы тел A и B легко находим численные оценки коэффициентов в (4), (5) и оценки $|\Delta a^i|$, $|\Delta b^i|$ за один оборот, которые находятся в интервале от $5 \cdot 10^2$ см до $7 \cdot 10^6$ см, т.е. максимальная релятивистская поправка на 4–5 порядков меньше смещения центра масс согласно (3): за один оборот $|\tilde{c}^2| \approx 4 \cdot 10^{11}$ см. Поэтому поправками (4), (5) можно пренебречь.

Величина смещения центра масс системы двух тел в газопылевом шаре может оказаться на несколько порядков меньше, если распределение газопылевой среды в шаре будет *неоднородным* и величина плотности ρ будет убывать к периферии шара.

Литература

1. Рябушко А.П, Неманова И.Т. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 6. С. 519–522.
2. Неманова И.Т. *Релятивистское движение тел в среде* // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Мн.: БГУ, 1987.
3. Рябушко А.П. *Движение тел в общей теории относительности.* Мн., 1979.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

М.И. Тлеубергенов, Д.Т. Ажымбаев

По заданному множеству
$$\Lambda(t): \lambda(x,t)=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}^m, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \lambda\in C^{22}_{xt}, \tag{1}$$
требуется построить обобщенную силовую функцию $U=U(x,\dot{x},t)$ так, чтобы заданное множество $\Lambda(t)$ было интегральным многообразием стохастического уравнения лагранжевой структуры
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_\nu}=\sigma'_{\nu j}(x,\dot{x},t)\dot{\xi}_j, \quad \nu=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,r}. \tag{2}$$
Здесь $\{\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_r(t,\omega)\}$ — системы случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [1], можно представить в виде суммы процессов: $\xi=\xi_0+ +\int c(y)P^0(t,dy)$, где $\xi=(\xi_1(t,\omega),\ldots,\xi_r(t,\omega))^{\mathrm{т}}$, ξ_0 — векторный винеровский процесс.

В данной работе в отличие от [2] строится силовая функция в предположении, что заданное интегральное многообразие зависит лишь от обобщенных координат и не зависит от обобщенных скоростей. Для решения поставленной задачи на первом этапе по заданному множеству методом квазиобращения [3] в сочетании с методом Еругина [4] и в силу стохастического дифференцирования сложной функции [1] строится уравнение Ито
$$\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)+\sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi} \tag{3}$$
так, чтобы множество $\Lambda(t)$ (1) являлось интегральным многообразием построенного уравнения 3.

Затем на втором этапе по построенному уравнению Ито строятся эквивалентные ему уравнения лагранжевой структуры. И на третьем этапе в предположении, что обобщенный лагранжиан имеет вид
$$L=T(x,\dot{x},t)+U(x,\dot{x},t), \quad \text{где} \quad T=a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j, \quad i,j=\overline{1,n}, \tag{4}$$
искомая силовая функция определяется в виде $U(x,\dot{x},t)=L(x,\dot{x},t)-a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$.

Введем матрицу h^k_ν и рассмотрим задачу непрямого (косвенного) представления уравнения лагранжевой структуры
$$h^k_\nu(\ddot{x}_k-f_k-\sigma_{kj}\dot{\xi}^j)\equiv\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_\nu}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_\nu}-\sigma'_{\nu j}\dot{\xi}^j.$$

С использованием обозначений работ [1–3] доказывается следующая теорема.

Теорема. *Для непрямого построения множества стохастических уравнений лагранжевой структуры* (2) *по заданному множеству* (1) *с обобщенным лагранжианом вида* (4) *так, чтобы множество* (1) *было интегральным многообразием построенных уравнений необходимо и достаточно, чтобы обобщенная силовая функция* $U = U(x, \dot{x}, t)$ *удовлетворяла условиям*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_k} = h_\nu^k - a_{\nu k}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_\nu} = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial x_k}\dot{x}_k + \tilde{S}_{1\nu} + \tilde{S}_{2\nu} + \tilde{S}_{3\nu} + h_v^k f_k,$$

а вектор-функция f *и матрица* σ *— условию*

$$f = k[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ (A - \dot{x}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial x}\dot{x} - 2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}), \sigma_i = s_i\left[\frac{\partial \lambda}{\partial x}C\right] + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^+ B_i,$$

где $i = \overline{1, r}$, $\sigma_i = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \ldots, \sigma_{ni})$ *—* i*-й столбец матрицы* $\sigma = (\sigma_{\nu j})$, $\nu = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$; $B_i = (B_{1i}, B_{2i}, \ldots, B_{mi})^m$ *—* i*-й столбец матрицы* $B = (B_{\mu j})$, $\mu = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, r}$; s_i, k *— произвольные скалярные величины,*

$$\tilde{S}_{1\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 U}{\partial \dot{x}_\nu \partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k}\sigma_{ij}\sigma_{kj}, \quad \tilde{S}_{2\nu} = \int \left\{\frac{\partial U(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu}\right\} dy,$$

$$S_{3\nu} = \int \left[\frac{\partial U(x, \dot{x} + \sigma c(y), t)}{\partial \dot{x}_\nu} - \frac{\partial U(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}_\nu}\right] \dot{P}^0(t, dy).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта № 3357/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Литература

1. Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация.* М.: Наука, 1990.

2. Тлеубергенов М.И., Ажымбаев Д.Т. *О построении дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию при наличии случайных возмущений с независимыми приращениями* // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2013. № 2. С. 94–104.

3. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. *Уравнения программных движений.* М.: Изд-во РУДН, 1986.

4. Еругин Н.П. *Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую* // Прикл. математика и механика. М., 1952. Т. 10. Вып. 6. С. 659–670.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ ПОЛИНОМА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

Как известно, теорема Абеля делает невозможным получение формул точного аналитического выражения корней алгебраического уравнения пятой и более высоких степеней через его коэффициенты. Тем не менее, нередко при рассмотрении ряда задач в различных областях знания возникает необходимость в наличии относительно простых формул для прямого приближенного нахождения корня алгебраического уравнения, выраженного через коэффициенты многочлена. Существующие алгоритмы прямого получения приближенного решения алгебраического уравнения, такие как, например, алгоритм Бернулли и r/ϕ-алгоритм В.И. Шмойлова [1], не всегда удобны для использования на практике и не имеют распространения на случай тригонометрических полиномов.

Важную роль в получении некоторых прямых алгоритмов приближенного нахождения корня алгебраического или тригонометрического полинома играет следующая теорема [2].

Теорема. *Пусть* $f(x)$ *— алгебраический или тригонометрический многочлен комплексного аргумента степени* n *вида*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \textit{или} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

соответственно, и пусть разложение функции $1/f(x)$ *в ряд Тейлора имеет вид*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{1}$$

Тогда если $f(x)$ *имеет только один минимальный по модулю корень, например,* $|x_1| < |x_2| \leqslant |x_3| \leqslant \ldots \leqslant |x_n|$, *то в минимальной по модулю точке* x_1 *расхождения ряда (1) предел отношения соседних слагаемых данного ряда стремится к единице с увеличением их порядкового номера, т.е. справедливо выражение*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{c_m x^m}{c_{m+1} x^{m+1}} = 1. \tag{2}$$

Следствием из данной теоремы является возможность получения при помощи систем компьютерной алгебры цепочки формул для выражения минимального по модулю корня алгебраического или тригонометрического полинома через его коэффициенты. Это означает, что если для фиксированного m выразить коэффициенты c_m и c_{m+1} ряда (1) через коэффициенты исходного многочлена $f(x)$, то, учитывая (2), получим выражение для вычисления приближенного значения минимального по модулю корня уравнения $f(x) = 0$: $x_1 \approx c_m/c_{m+1}$.

Например, для алгебраического многочлена пятой степени вида $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ получаем

$$x_1 \approx \frac{c_3}{c_4} = \frac{(be^2 - 2cde + d^3)e}{ae^3 - 2bde^2 - c^2e^2 + 3cd^2e - d^4},$$

$$x_1 \approx \frac{c_4}{c_5} = -\frac{(ae^3 - 2bde^2 - c^2e^2 + 3cd^2e - d^4)e}{2ade^3 + 2bce^3 - 3bd^2e^2 - 3c^2de^2 + 4cd^3e - d^5 - e^4},$$

$$x_1 \approx \frac{c_5}{c_6} = \frac{(2ade^3 + 2bce^3 - 3bd^2e^2 - 3c^2de^2 + 4cd^3e - d^5 - e^4)e}{2ace^4 - 3ad^2e^3 + b^2e^4 - 6bcde^3 + 4bd^3e^2 - c^3e^3 + 6c^2d^2e^2 - 5cd^4e + d^6 + 2de^4}.$$

Рассмотрим применение данных формул на конкретном числовом примере. Пусть

$$f(x) = x^5 + 448x^3 + 96x^2 - 26000x + 48000 = (x-2)(x-6)(x-10\sqrt{5}i)(x+10\sqrt{5}i)(x+8).$$

Находим приближенные значения корня

$$c_3/c_4 \approx 1.98641, \quad c_4/c_5 \approx 1.99694, \quad c_5/c_6 \approx 1.99861, \quad c_9/c_{10} \approx 1.99998.$$

Для случая, когда $f(x)$ является тригонометрическим полиномом, аналогичные формулы для приближенного нахождения корня с минимальным модулем также являются дробно-аналитическими функциями от коэффициентов полинома и имеют более громоздкий вид, поэтому в настоящих тезисах приводить их не будем, а приведем только результаты их применения на конкретном числовом примере. Пусть

$$f(x) = -7 + 10\cos x + 2\sin x - 8\cos 2x + 4\sin 2x.$$

За точное значение минимального по модулю корня примем $x = 0.380969569$. Ниже приведены полученные приближенные значения:

$$c_4/c_5 \approx 0.382303, \quad c_5/c_6 \approx 0.380551, \quad c_7/c_8 \approx 0.380941, \quad c_{10}/c_{11} \approx 0.380969.$$

Решение многих краевых задач для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y^{(1)}(x) + a_n y(x) = f(x), \tag{3}$$

например, T-периодической краевой задачи записывается в форме

$$y(x) = \int_0^T G(s) f(x-s)\, ds,$$

причем функция Грина $G(s)$ содержит корни характеричтического уравнения.

В задачах управления колебаниями, как правило, известно множество изменения коэффициентов уравнения (3), например, таким множеством может быть множество, определяемое неравенствами $b_j \leqslant a_j \leqslant c_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда, естественно, требуется хотя бы приближенно (но аналитически) выразить корни характерестического уравнения через коэффициенты, что и делается в настоящем докладе. Далее можно решить зачачу максимизации или минимизации амплитуды колебания при заданной функции $f(x)$ обычными методами максимизации или минимизации.

Литература

1. Шмойлов В.И. *Решение алгебраических уравнений при помощи r/ϕ-алгоритма.* Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2011.

2. Трубников Ю.В., Чернявский М.М., Воронов А.М. *Роль расходящихся степенных рядов в некоторых алгоритмах приближенного аналитического решения алгебраических уравнений* // Вестн. Витебского гос. ун-та. 2017. № 4 (97). С. 29–33.

О КЛАССИФИКАЦИИ КВАЗИОДНОРОДНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ С ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ЗАМЕЩЕНИЯ

Г.А. Хацкевич, А.Ф. Проневич

Производственные функции (ПФ) являются базовым элементом математического аппарата моделирования микро- и макроэкономических процессов. Основной класс ПФ, используемых в практическом экономическом анализе — однородные ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов. Однако этот класс ПФ в полной мере не позволяет описывать реальные процессы производства, что приводит к задаче его расширения в разных направлениях (см., например, работы [1–3]). В данной работе класс однородных двухфакторных ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов обобщен на класс квазиоднородных ПФ.

Говоря о квазиоднородности ПФ, будем исходить из следующего определения [4]. Двухфакторную производственную функцию $f(x_1,x_2)$ будем называть *квазиоднородной степени* $q\in\mathbb{R}$ относительно весового вектора $\mathrm{g}=(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, если выполняется тождество

$$f(\alpha^{\mathrm{g}_1}x_1,\alpha^{\mathrm{g}_2}x_2)=\alpha^q f(x_1,x_2)\quad\forall(x_1,x_2)\in\{(x_1,x_2):x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0\},\quad\forall\alpha\in(0;+\infty).$$

Отметим, что квазиоднородная ПФ при $\mathrm{g}=(1,1)$ является однородной. Квазиоднородность описывает условие изменения выпуска продукции при изменении объема капитала и количества труда в различное число раз. Основной результат работы выражает

Теорема [5]. *Параметрический класс квазиоднородных степени q относительно весового вектора $\mathrm{g}=(\mathrm{g}_1,\mathrm{g}_2)$ двухфакторных производственных функций с постоянной эластичностью замещения факторов производства $\sigma\neq0$ имеет аналитический вид*

$$f:(x_1,x_2)\to C_2(x_2)\exp\int z(x_1,x_2)\,dx_1, \tag{1}$$

где функция z определяется из функционального тождества

$$z^{\mathrm{g}_2}\left(x_1z-\frac{q}{\mathrm{g}_1}\right)^{-\mathrm{g}_1}\left(x_1z-\frac{q}{\mathrm{g}_1-\mathrm{g}_2}\right)^{\mathrm{g}_1-\mathrm{g}_2}=C_1(x_2)x_1^{-\mathrm{g}_2/\sigma},$$

а C_1 и C_2 — функции переменной x_2, которые находятся подстановкой ПФ (1) в систему уравнений в частных производных ($\partial_{x_1}f=f_1$, $\partial_{x_2}f=f_2$, $\partial^2_{x_2x_2}f=f_{22}$, $\partial^2_{x_1x_2}f=f_{12}$) :

$$f_{22}=\left(\frac{\mathrm{g}_2(\mathrm{g}_2-\mathrm{g}_1)(\sigma-1)}{\sigma q^2}x_2\left(\frac{f_2}{f}\right)^2+\frac{\sigma q+(\sigma-1)(\mathrm{g}_1-2\mathrm{g}_2)}{\sigma q}\left(\frac{f_2}{f}\right)-\frac{1}{\sigma x_2}\right)f_2,$$

$$f_{12}=\left(2-\frac{(\mathrm{g}_1+\mathrm{g}_2)(\sigma-1)}{\sigma q}+\frac{\mathrm{g}_1(\mathrm{g}_1-\mathrm{g}_2)(\sigma-1)}{\sigma q^2}x_1\left(\frac{f_1}{f}\right)+\frac{\mathrm{g}_2(\mathrm{g}_2-\mathrm{g}_1)(\sigma-1)}{\sigma q^2}x_2\left(\frac{f_2}{f}\right)\right)\frac{f_1f_2}{2f}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Экономика и гуманитарное развитие белорусского общества» (НИР «Разработка и применение эконометрических моделей инвестиционной привлекательности, конкурентоспособности и инновационности регионов»).

Литература

1. Клейнер Г.Б. *Производственные функции.* М.: Финансы и статистика, 1986.

2. Горбунов В.К. *Производственные функции: теория и построение.* Ульяновск: УлГУ, 2013.

3. Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф. *Квазиоднородные производственные функции единичной эластичности замещения факторов по Хиксу* // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2017. Вып. 11. С. 135–140.

4. Клейнер Г.Б., Пионтковский Д.И. *О характеризации производственных функций Солоу* // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35. № 2. С. 124–137.

5. Khatskevich G.A., Pranevich A.F. *On quasi-homogeneous production functions with constant elasticity of factors substitution* // Journal of Belarussian State University. Economics. 2017. № 1. P. 46–50.

ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ТОНКОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ПРИСУТСТВИИ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Г.Ч. Шушкевич

Пусть однородное пространство R^3 разделено плоскостью Γ на два полупространства W и D_2. В полупространстве W находится незамкнутая идеально тонкая оболочка S, которая расположена на поверхности сплюснутого эллипсоида вращения S_1 с центром в точке O, где a, b — большая и малая полуоси эллипса соответственно. Область пространства, ограниченную поверхностью эллипсоида вращения S_1, обозначим через D_0, тогда $D_1 = W \backslash (D_0 \bigcup S_1)$. Точку пересечения прямой L с плоскостью Γ обозначим через O_1. Прямая L проходит через точку O и перпендикулярна плоскости Γ. Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h. На плоскости Γ имеется круговое отверстие Γ_1 радиуса d. В точке O расположен источник электростатического поля — электростатический диполь, момент которого направлен вдоль оси Oz.

Для решения задачи с точкой O свяжем сферические координаты, а с точкой O_1 — цилиндрические координаты.

В этом случае поверхность S и круговое отверстие Γ_1 описываются следующим образом:

$$S = \{\alpha = \alpha_0 = \operatorname{Arsh}(b/c), \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0 < \pi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi\},$$

$$\Gamma_1 = \{0 \leqslant \rho_1 \leqslant d, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \quad z_1 = 0\}.$$

Обозначим через U_d потенциал электростатического поля диполя, через U_j — потенциалы вторичного электростатического поля в области D_j, $j = 0, 1, 2$.

Постановка задачи. Требуется найти вторичные потенциалы $U_j, j = 0, 1, 2,$ которые удовлетворяют:

1) уравнению Лапласа $\Delta U_j = 0$, где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа;

2) граничным условиям

$$(U_d(M) + U_0(M))|_{M \in S} = U_1(M)|_{M \in S} = 0, \quad U_1(M)|_{M \in \Gamma \backslash \Gamma_1} = 0;$$

3) условию на бесконечности

$$U_j(M) \to 0, \quad j = 1, 2, \quad M \to \infty,$$

где M — произвольная точка области D_j.

Кроме того, потребуем выполнения условий непрерывности потенциала на поверхности эллипсоида S_1 и непрерывности поля на части поверхности эллипсоида S_1, которая не является экраном [1, 2]:

$$U_d(\alpha, \beta) + U_0(\alpha, \beta) = U_1(\alpha, \beta), \quad \alpha = \alpha_0, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(U_d(\alpha, \beta) + U_0(\alpha, \beta)) = \frac{\partial U_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta_0 < \beta \leqslant \pi,$$

а также условий непрерывности потенциала на плоскости Γ и непрерывности поля на Γ_1 [2]

$$U_1(\rho_1, z_1) = U_2(\rho_1, z_1), \quad z_1 = 0, \quad 0 \leqslant \rho_1 < \infty,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1}U_1(\rho_1, z_1) = \frac{\partial}{\partial z_1}U_2(\rho_1, z_1), \quad z_1 = 0, \quad 0 \leqslant \rho_1 < d.$$

Потенциал электрического диполя, момент которого направлен вдоль оси Oz, представим в виде [3]

$$U_d(r, \theta) = P\frac{\cos\theta}{r^2} = P\frac{1}{r^2}P_1(\cos\theta),$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, P — известная величина [3].

Решение поставленной граничной задачи будем искать в виде суперпозиции цилиндрических и эллипсоидальных гармонических функций [1, 2] так, чтобы автоматически выполнялось условие на бесконечности 3).

Используя соответствующие теоремы сложения для гармонических функций, решение поставленной граничной задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра и парным интегральным уравнениям с ядром в виде функции Бесселя, которые преобразованы к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Выведена формула для вычисления вторичного поля через решение полученной системы интегральных уравнений.

Разработанная методика может найти практическое применение при разработке и конструировании экранов в различных областях техники.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Ковергенция–2020» (подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»).

Литература

1. Шушкевич Г.Ч. *Моделирование поля элекростатического диполя в присутствии тонкой сплюснутой незамкнутой эллипсоидальной оболочки и плоскости* // Информатика. 2017. № 2. С. 14–23.

2. Shushkevich G.Ch. *Modeling fields in multiply connected regions in electrostatics problems.* Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015.

3. Аполлонский С.М., Ерофеенко В.Т. *Электромагнитные поля в экранирующих оболочках.* Мн.: Университетское, 1988.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЯ PYTHON

Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич

Использование компьютерных технологий в образовании является важным фактором повышения качества высшего образования и обуславливает изменение не только способов преподавания математических и инженерно-технических дисциплин, но и отношения студентов к их изучению. При таком подходе преодолеваются трудности в решении математических задач, совершенствуется уровень обучения, поскольку больше внимания уделяется качественным аспектам, расширяется круг доступных для решения задач, обеспечивается возможность представления результатов вычислений в наглядной графической форме.

Визуализация решения задачи позволяет студенту лучше понять суть сложных процессов и явлений, делая наглядным результат изменения решения в зависимости от значений используемых параметров или переменных.

Системы компьютерной математики — Matlab, Mathematica, Mathcad, Maple и др., — представляют собой современное направление в компьютерных технологиях, обеспечивая быстрое и удобное решение сложных научно-технических задач. Однако они имеют определенную стоимость, что делает их недоступными, в первую очередь, для студентов.

Мы предлагаем рассмотреть Python как бесплатную и, соответственно, общедоступную систему для проведения вычислений и визуализации результатов [1]. Модули NumPy, SciPy позволяют выполнять дифференцирование и интегрирование, решать задачи линейной алгебры и дифференциальные уравнения. Модуль Matplotlib содержит средства графического представления результатов решений.

Задачи, возникающие в моделировании, например, физических и биологических процессов, описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных. Рассмотрим решение некоторых прикладных задач, используя Python 3.6.

Пример 1. В результате химической реакции между веществами A и B образуется вещество C. Установить зависимость массы вещества C от времени, если в момент вступления в реакцию массы веществ A и B были равны соответственно a кг и b кг. Скорость реакции пропорциональна произведению реагирующих масс.

Решение данной задачи сводится к решению задачи Коши [2]

$$\frac{d}{dt}x(t) = k(a - x(t))(b - x(t), x(0) = 0,$$

где $x(t)$ — количество вещества C через время t, k — коэффициент пропорциональности, $k > 0$.

Графики функции $x(t)$ для некоторых значений параметра k, $a = 0,5$ и $b = 2$ приведены на рис. 1.

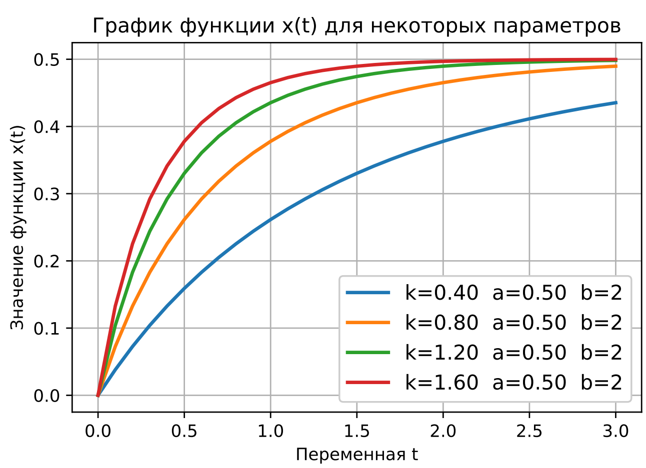


Рис. 1. График функции $x(t)$.

Пример 2. Математическая модель «хищник — жертва» Мак-Артура отражает динамику взаимодействия популяций и описывается системой дифференциальных уравнений [3]

$$\frac{d}{dt}x(t) = (1 - 0,1\,x(t))x(t) - \frac{x(t)y(t)}{1 + \alpha x(t)}, \quad \frac{d}{dt}y(t) = \left(\frac{x(t)}{1 + \alpha x(t)} - 1\right)y(t),$$

с начальными условиями $x(0) = 3$, $y(0) = 1$ и $\alpha \in [0,1; 0,9]$. Здесь $x(t), y(t)$ — плотности популяций жертв и хищников в момент времени t.

Графики функций $x(t), y(t)$ на отрезке для значений параметра $\alpha = 0.1$ и фазовая траектория данной автономной системы представлены на рис. 2, 3.

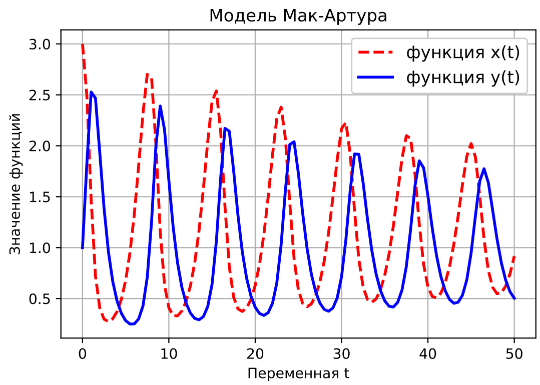


Рис. 2. Графики функций $x(t)$, $y(t)$.

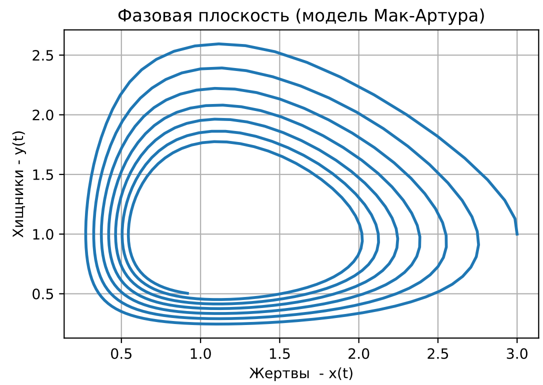


Рис. 3. Фазовая траектория автономной системы

Литература

1. Kiusalaas J. *Numerical methods in engineering with Python 3.* Cambridge: University Press, 2013.

2. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А., *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи.* М.: Высшая школа, 1989.

3. Базыкин А.Д. *Математическая биофизика взаимодействующих популяций популяций.* М.: Наука, 1985.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКРЫТЫХ ПОТОКОВ НЕНЬЮТОНОВСКИХ СРЕД

М.Э. Эглит, А.Е. Якубенко, Т.А. Якубенко, Ю.С. Зайко

Потоки неньютоновских жидкостей, т.е. сред, напряжения в которых являются нелинейными функциями компонент тензора скоростей деформаций и, возможно, других параметров, широко встречаются в природе и в технике. В частности, это потоки, несущие взвешенные твердые частицы, которые используются в горнодобывающей, химической, пищевой, бумажной промышленности, при бурении нефтяных скважин, при производстве полимеров, в очистных сооружениях. Катастрофические потоки, возникающие на горных склонах, такие как снежные лавины, сели, оползни, лавовые потоки, также проявляют неньютоновские свойства, в частности, могут останавливаться на склонах с ненулевым уклоном.

В данной работе рассматривается нестационарная задача о движении склонового потока по наклонной поверхности. Считается, что если касательное напряжение на дне потока достигает величины предела прочности лежащего на склоне материала, то материал склона разрушается и вовлекается в поток. При этом перпендикулярно дну вниз распространяется фронт разрушения склонового материала; скорость распространения фронта заранее не известна. Задача заключается в том, чтобы рассчитать касательное напряжение в потоке, количество донного материала, вовлекаемого в единицу времени после того, как касательное напряжение на дне достигнет критической величины, а также изменение скорости и толщины потока в результате вовлечения донного материала. Склоновый поток моделируется как нестационарный поток нелинейно-вязкой жидкости с коэффициентом вязкости, зависящим от второго инварианта тензора скоростей деформаций, а именно, используются реологические соотношения Хершеля — Балкли, которые при различном выборе коэффициентов соответствуют линейно-вязкой (ньютоновской) жидкости, степенной жидкости, а также средам, обладающим пределом текучести. На свободной поверхности ставится условие отсутствия касательного напряжения, а на дне — два условия: условие прилипания и условие, задающее величину касательного напряжения на дне. Последнее условие позволяет найти неизвестную скорость распространения фронта разрушения. С использованием неявной разностной схемы составлена программа и проведены серии расчетов с целью изучить влияние реологических свойств движущейся среды и захвата подстилающего материала. Исследование показывает, что при движении с захватом по длинному однородному склону скорость потока возрастает. Профили скоростей в ламинарных потоках, описываемых моделями Хершеля — Балкли, при больших временах становятся близкими к линейным всюду, за исключением относительно узкого слоя вблизи верхней поверхности потока, а скорость вовлечения стремится к константе. Величина этой константы зависит от коэффициентов, описывающих свойства материала потока, прочности на сдвиг подстилающего материала и угла склона. Асимптотические формулы для скорости вовлечения и скорости сдвига в линейной части профиля скоростей получены аналитически и подтверждены численными расчетами.

Литература

1. Eglit M.E., Yakubenko A.E. *Numerical modeling of slope flows entraining bottom material* // Cold Regions Science and Technology. 2014. V. 46. P. 139–148.

2. Зайко Ю.С. *Математическое моделирование склоновых потоков с различной реологией* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 4. С. 3–11.

3. Issler D., Pastor Perez M. *Interplay of entrainment and rheology in snow avalanches; a numerical study* // Annals of Glaciology. 2011. V. 52 (58). P. 143–147.

MODELLING OF THE NONLINEAR THERMODIFFUSION AT MODERATE TEMPERATURES

A.J. Janavičius, D. Jurgaitis, S. Turskienė

In our thesis we discuss the properties of the nonlinear thermodiffusion equation corresponding to the diffusion processes which occur with a finite velocity. In earliest papers, prof. A.J. Janavičius proposed the nonlinear diffusion equation with the diffusion coefficient directly proportional to the concentration of impurities [1]. This equation presented the description of the profiles of impurities introduced by X-rays irradiation at room temperatures or superdiffusion in Si crystals [2]. The heat transfer in gases can carry a greater average kinetic energy based on nonlinear diffusion of gas molecules from hot regions to the coldest ones with a finite velocity by random Brownian motions. In this case the heat transfer in gases can be described by using nonlinear thermodiffusion equation with the nonlinear thermodiffusion coefficient proportional to the temperature [3]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_n(T)\frac{\partial}{\partial x}T\right), \quad D_n(T) = \frac{K(T)}{\rho \cdot c_p} = \frac{k\overline{v}}{\sqrt{2}\pi d^2 p T_e}T = \frac{D_e}{T_e}T = D_{en}T, \tag{1}$$

where the coefficient of thermal conductivity $K(T)$ depends on the diameter of molecules d, $\overline{v}$ is mean value of molecular movement, c_p is the heat capacity of gas at constant pressure $p = nkT$, ρ is density of gas, k is Boltzmann constant, T_e is environment temperature, D_e is the linear thermodiffusion coefficient in environment with temperature T_e, D_{en} is proportionality constant for nonlinear thermodiffusion function $D_n(T)$. The solution of (1) $T(\xi)$ can be realized introducing similarity variable ξ

$$T(\xi) = T_e f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{D_{en}T_e t}} = \frac{x}{\sqrt{D_e t}}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z = \xi - \xi_0, \tag{2}$$

$$0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad x_0 = \xi_0\sqrt{D_{en}T_e t} = \xi_0\sqrt{D_e t}$$

by using modified expansion (1)

$$2\frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial}{\partial z}f\right) + z\frac{\partial}{\partial z}f + \xi_0\frac{\partial}{\partial z}f = 0.$$

The constant ξ_0 defining a maximum of heat penetration depths x_0. The obtained approximate analytical solutions $T(\xi) = T_e f(\xi)$ are presented in Table 1 $f(z) = a1_0 + a_1 z + a_2 z^2$, $a_0 = 1$, for boundary conditions $T(\xi = \xi_0) = T_e f(0) = T_e$, $T(\xi = 0) = T_e(-\xi_0) = T_S$. The definite profiles of temperatures in gasses for source T_S and temperature differences $\Delta T = T_s - T_e$ are successfully applied in defining temperature profiles.

$\Delta T/T_e$	a_1	a_2	ξ_0
0.05	−0.446843	−0.0870491	0.114448
0.1	−0.481917	−0.090069	0.216244
0.2	−0.544857	−0.094755	0.394076

Table 1. Values of parameters a_1, a_2, ξ_0 of solution (2).

By using thermodiffusion coefficients for environment $D_e = K_e/(\rho \cdot c_p)$ we can easily find heat penetration depth x_0

$$0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad x_0 = \xi_0\sqrt{D_{en}T_e t} = \xi_0\sqrt{D_e t}.$$

References

1. Janavičius A. J. *Method for solving the nonlinear diffusion equation* // Physics Letters. A. 1997. V. 224. P. 159–162.

2. Janavičius A. J., Balakauskas S., Kazlauskienė V., Mekys A., Purlys R., Storasta J. *Superdiffusion in Si crystal lattice irradiated by soft X-rays* // Acta Physica Polonica. A. 2008. V. 114. № 4. P. 779–790.

3. Janavičius A. J., Turskienė S. *Modeling of thermodiffusion inertia in metal films heated with ultra-short lasers pulses* // Acta Physica Polonica. A. 2008. V. 110. P. 511–521.

4. Janavičius A. J., Turskienė S. *Nonlinear thermal conductivity in gases* // Proc. Lith. Math. Soc. Ser. A. 2016. V. 57. P. 21–28.

ALGORITHMIZATION OF PROGRAMMING MOTIONS OF A MULTICOORDINATE DISPLACEMENT SYSTEMS

S.E. Karpovich, V.U. Kuzniatsou

Common formulation of a task of the algorithmization programming motions of the multi-coordinate systems of different technological devices and space mechanisms, including robots, manipulators and mechatronic systems has the next describing. It is known that the motion of the multicoordinate devices describes by the system of differential equations of 2 degree with the help of mechanics, for example, of Lagrange [1, 2]. Equations of the motions can be reduced to the following form, considering the features, of the multicoordinate systems, which have autonomously-controlled coordinate modules, that count is determined by the need to realize a required number of degrees of freedom in three-dimensional space:

$$\dot{x_i} = p_i(x_1, \ldots, x_n) + b_i(x_1, \ldots, x_n)u_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

where $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — generalized phase coordinates of the system; $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — control vector; $b_i(x_1, \ldots, x_n)$ — variable coefficients.

The task of the algorithmization programming motions of the multicoordinate systems of devices is to create control $u = u(t, x)$, that can satisfy of some technical requirements $u \in U, U$ — given set in R^n, where the solution of the system (1) satisfies for additional condition:

$$\omega_k(t, x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad m \leqslant n, \tag{2}$$

thus the motion should pass on a curve or surface, determined by equations (2). The system of equations (2) is called a program of the motion.

The task of the algorithmization programming motions can decided as the task of a synthesis of the optimal programming motions, where the main idea is to create the control $u = u(t, x)$, of the motion (2) and delivers a minimum to some functional, as it can be decided ambiguously. In the current work, the task of synthesis of the optimal programming motions by speed, which has the goal to minimize criteria $\varphi = t_1 \to \min$ on the set of system (1) solutions with phase constraints, has considered. Phase constrains represents:

$$x(0) = 0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \omega_i(t, x) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

In the same way, the task can be decided with minimum of expenditure of management resources $\varphi = \int \|u(t)\|^2 \, dt \to \min$.

Such tasks represents the tasks of optimal control with phase constraints on the gap. Necessary conditions of optimality in the principle form of maximum is known, i.e. such tasks in theoretical cases is solvable. But in a practical case, the solution of such tasks is very difficult, as the presence of phase constraints on the whole interval $[0, t_1]$, the optimality conditions in general, and the conjugate system in particular, contain regular measures. The last case force to check other approaches during solving applied problems.

The algorithmization of the programming motions on the base of solving reverse dynamics problem, where mathematical models have took on the base common method of creating differential equations by a given integral manifold of the proposed N.P. Yerugin [3], proposed in the current work. The realization of a such approach allows to define the controlling for different cases of the programming motions for the multicoordinate displacement systems.

References

1. Brizard Alain J. *An Introduction to Lagrangian Mechanics.* V. 2. Singapore: British Library Cataloguing-in-Publication Data, 2014.

2. Calckin M.G. *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics.* Singapore, 1998.

3. Yerugin N.P. *The Book for reading for common course of differential equations.* Minsk: High School, 1979.

REPLICATOR DYNAMICS FOR EVOLUTIONARY GAMES WITH RESOURCES

A. Swierniak, M. Krzeslak, M. Kimmel

The objective of this study is to develop and apply a new mathematical model to address the questions of importance for basic cancer research and for practice of oncology: What is the role of diverse kinds of intervention (exposures or treatments) in the evolution of cancer? Can proliferation acceleration make carcinogenesis more likely? Can cell killing create conditions that enable evolution of heterogeneity and therefore increase the viability of the cancer cell population? An important part of the problem we address is whether the genetic heterogeneity in cancer cells exists ab initio (before diagnosis and intervention), or it does it evolve following and as a result of the intervention. We believe, based on evidence, that the former is the case, as stated in the following hypothesis.

Positive (stimulating) or negative (cell-killing) treatment modifies pre-cancer and tumor cell heterogeneity through promotion of selection of preexisting cell clones, their phenotypic plasticity and self-organization. We are far from believing that using a new model we are prepared to prove completely this hypothesis. Nevertheless we hope that the new approach based on the theory of evolutionary games, gives an efficient tool for investigation of different aspects related to the hypothesis.

We propose an extension of evolutionary game models [1] which gives possibility to study the role of interventions in cancer evolution. More precisely we endow evolutionary game models with changes of the phenotypes adjustment during the transient generations within the population. These changes are performed by the parameters in the payoff matrix, which determine the fitness (payoff, adjustment) resulting from different interactions between players (taking into account both the benefits and costs of particular actions and strategies). Alteration of these parameters changes them into functions that simulate (within this model) the changes within the environment and define their different impacts on the fitness. To study dynamics of changes leading to the evolutionary stable states in this game we use standard notion of replicator dynamics [2]. Nevertheless since the entries of the payoff matrix become functions of time the replicator dynamics is described by differential equations with time-varying parameters which significantly complicates their analysis. These difficulties are related not only to possible analytical solutions but also to the analysis of asymptotic behaviors.

For example it is not known whether the entropy Lyapunov function recommended for analysis of stability in the case of standard replicator equations is still a good choice. Of course everything is dependent on the predicted changes in resources, happily in our applications these changes have rather standard form. We start with classical hawk and dove game [3] endowed with one resource which modifies an outcome of interaction between two phenotypes and we demonstrate changes in replicator dynamics comparing with the case without the external resource. Then we move to one of the simplest model of interaction between different phenotypes in cancer cell populations, the so called angiogenic game [4]. Since this game contains, similarly as the hawk and dove game only 2 phenotypes, the replicator dynamics is described by one differential equation and the analysis is still rather simple.

The last example which we consider in our is four phenotype combination of two Tomlinson models of cancer cell interaction [4, 5]. This model without resources was considered by us in [6]. The goal of this study is to include two resources in this model one of which characterizes an external intervention by growth factors and the other treatment by cytotoxic agents. This is one of possible schemes of combined anticancer therapy and we try to discover its effect on cancer population evolution.

Aknowledgement. The study was partly supported by National Science Committee, Poland, grant 2016/21/B/ST7/02241 (AS) and by SUT, grant BK-204/Rau1/2017, t.3.

References

1. Maynard Smith J., Price G. R. *The logic of animal conflict* // Nature. 1973. V. 246. P. 15–18.

2. Taylor P.D., Jonker L.B. *Evolutionarily stable strategies and game dynamics* // Mathematical Biosciences. 1978. V. 40. P. 145–156.

3. Maynard Smith J. *Evolution and the theory of games.* Cambridge University Press, 1982.

4. Tomlinson I.P.M. *Game-theory models of interactions between tumour cells* // European Journal of Cancer. 1997. V. 33. P. 1495–1500.

5. Tomlinson I.P.M., Bodmer W.F. *Modeling the consequences of interactions between tumour cells* // British Journal of Cancer. 1997. V. 75. P. 157–160.

6. Swierniak A., Krzeslak M. *Application of evolutionary games to modeling carcinogenesis* // Mathematical Biosciences and Engineering. 2013. V. 3. P. 873–911.

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

О КУРСЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» НА ФПМИ БГУ

Л.А. Альсевич, В.И. Булатов, Н.Я. Радыно

На ФПМИ БГУ «Дифференциальные уравнения» представляют собой самостоятельный курс, входящий в цикл фундаментальных математических дисциплин. На него отводится по 68 часов на лекционные и практические занятия, проводимые по единой программе в двух семестрах на втором курсе на трех потоках специальностей «Информатика», «Прикладная математика», «Актуарная математика», «Экономическая кибернетика», «Компьютерная безопасность».

Дифференциальные уравнения читаются также студентам четвертого потока специальности «Прикладная информатика», но по другой программе и с другим количеством часов.

Лекции и практические занятия по «Дифференциальным уравнениям» на ФПМИ проводятся как традиционно (с мелом в руке), так и с использованием технических средств (например, с проектором).

На первых трех потоках второго курса в каждом из семестров предусмотрен зачет, а в конце курса — экзамен по теоретической части. В процессе обучения также проводятся по две контрольные работы и по два коллоквиума в каждом семестре.

Для более эффективного проведения занятий по дифференциальным уравнениям на кафедре высшей математики ФПМИ подготовлено и издано учебное пособие [1], предусматривающее также использование компьютеров в процессе обучения. В нем разработаны алгоритмы решения задач по дифференциальным уравнениям, требующие для своей реализации привлечения соответствующего программного обеспечения.

Одним из примеров таких задач является задача построения и исследования фазовых графиков однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, для решения которой в [1] приведены алгоритмы в соответствии с различными случаями корней характеристического уравнения. Аналогичные алгоритмы используются в [1] и для исследования фазовых графиков однородных линейных стационарных векторных уравнений размерности два.

Особенно это актуально при построении решения линейного векторного уравнения со стационарным оператором, где необходимо вычислять собственные значения матрицы размерности больше трех, строить ее экспоненту, а также находить решения задачи Коши методом последовательных приближений и голоморфные решения линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами и голоморфной неоднородностью.

Возможность решения таких задач на практических занятиях по дифференциальным уравнениям, а также при самостоятельной работе обусловлено наличием у каждого студента ФПМИ БГУ индивидуального ноутбука.

Литература

1. Альсевич Л.А., Мазаник С.А., Расолько Г.А., Черенкова Л.П. *Дифференциальные уравнения. Практикум.* Минск: Вышэйшая школа, 2012.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Л.А. Альсевич, Г.А. Расолько

Продуманная методика преподавания математики позволяет сочетать особенности математики как науки и как учебного предмета в процессе математической подготовки студентов в классическом университете, поскольку математик остается математиком и тогда, когда продумывает методику преподавания. Поясним данный тезис.

При интегрировании дифференциальных уравнений на практических занятиях все методы и подходы легко алгоритмизируются. А это, в свою очередь, позволяет в ходе построения общего решения или решения задачи Коши использовать системы компьютерной математики (СКМ).

Авторами доклада издано учебно-методическое пособие [1], в котором приведена методика использования СКМ MathCad в рассматриваемом курсе. На базе [1] и [2] издано учебное пособие [3].

СКМ MathCad предоставляет пользователю широкие возможности по использованию встроенных операторов (задание переменных, функций, систем, решению СЛАУ и т.д.), а также по созданию собственных посредством программирования. Применение СКМ при выполнении практических заданий позволяет систематизировать изучаемый материал, рассматривать частную задачу как часть общей, посредством задания конкретных данных в общий алгоритм. Проиллюстрируем сказанное на примере построения общего решения уравнения $Dx = Ax$, где A — постоянная матрица (см. [1, с. 182; 3, с. 98]). Отметим, что все требуемые далее теоремы и формулы приведены в начале каждого раздела в кратко изложенном теоретическом материале.

Алгоритм решения:

1. Составить характеристическое уравнение $\det(A - vE) = 0$.

2. Найти собственные значения матрицы A.

3. Определить число линейно независимых собственных векторов матрицы A (теорема).

4. Определить число клеток жордана в жордановой форме матрицы (теорема).

5. Установить размерность клеток Жордана по формуле.

6, Записать матрицу Жордана J.

7. Найти собственные векторы a_{0k}, соответствующие собственным значениям v_k (теорема), которые определяются из системы $(A - v_k E)a_{0k} = 0$.

8. Найти присоединенные векторы, если это необходимо, к собственному вектору a_l с собственным числом v_l, решив неоднородную алгебраическую систему $(A - v_l\, E)a_l = a_{l-1}$, $1 \leqslant l \leqslant p-1$, где $p-$ размерность соответствующей клетки Жордана.

9. Выписать матрицу S (теорема).

10. Найти обратную матрицу S^{-1}.

11. Построить матрицу e^{Jt}, используя формулу.

12. Найти $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$.

13. Выписать общее решение $x(t) = Se^{Jt}S^{-1}\,C$.

Далее в задании указывается конкретная матрица системы и после запуска MathCad выполнение задания осуществляется в его среде (см. [3, с. 101]). Отметим, что в [1, 3] в приложении приведен краткий справочник по использованию СКМ MathCad.

Литература

1. Расолько Г.А., Альсевич Л.А. *Использование информационных технологий в курсе «Дифференциальные уравнения».* Мн.: БГУ, 2012.

2. Альсевич Л.А., Черенкова Л.П. *Практикум по дифференциальным уравнениям.* Мн.: Вышэйшая школа, 1990.

3. Альсевич Л.А., Мазаник С.А., Расолько Г.А., Черенкова Л.П. *Дифференциальные уравнения. Практикум.* Мн.: Вышэйшая школа, 2012.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ИЗОКЛИН В КУРСЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.В. Белько, Н.В. Денисенко

При изучении высшей математики в ВУЗах необходимо учитывать базовый математический уровень. Например, для аграрно-технических и экономических специальностей не требуется самый высокий уровень изложения математики. Поэтому особенно важным являются наглядность, направленность и простота. При изучении раздела дифференциальных уравнений (ДУ) основные понятия являются достаточно сложными. Их усвоение требует знания разделов дифференциального и интегрального исчислений. С другой стороны, использование геометрических свойств решений ДУ позволяет глубже понимать основные понятия и описывать качественные свойства решений и их особенности. Одним из методов построения решений ДУ, использующим их геометрические свойства, является метод изоклин для уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной. На основе этого метода можно приближенно строить интегральные кривые, выделять особые решения и интерпретировать основные понятия.

Для примера мы рассматриваем дифференциальное уравнение $y' = y^2/xy - 8$. Для точек плоскости с координатами (x, y), $x \in [0, 10]$, $y \in [0, 10]$, и с шагом 1, мы строим изоклины. Интегральные кривые данного уравнения строятся как огибающие семейства изоклин (см. рисунок).

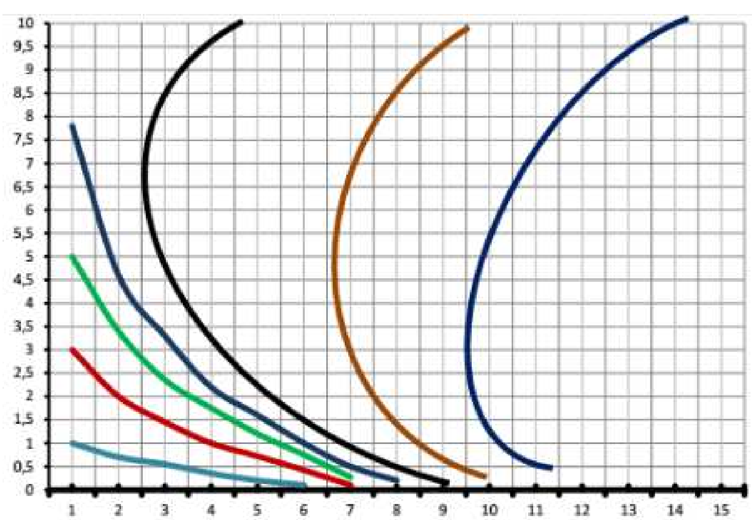


Рисунок.

На рисунке приведены графики полученных интегральных кривых. Эти кривые пересекают вертикально ветвь гиперболы $xy = 8$ и горизонтально — ось Ox, которая также является интегральной кривой.

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» И «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ» НА КАФЕДРЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ФПМИ БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТА

В.И. Булатов, О.А. Кастрица, С.А. Мазаник

Изучение дифференциальных уравнений требует знания основ дисциплин аналитического цикла, одной из которых является «Математический анализ». Можно выделить две стороны сложившейся исторически взаимной связи учебных дисциплин «Дифференциальные уравнения» и «Математический анализ». С одной стороны, раздел математики, посвященный изучению дифференциальных уравнений, появился как часть математического анализа в результате развития специфических методов исследования задач, описываемых функциональными уравнениями, содержащими производные и дифференциалы неизвестных функций. Для решения таких задач требуется также знание такого раздела «Математического анализа», как интегральное исчисление. С другой стороны, одной из целей, преследуемых при изложении математического анализа или его разделов в рамках учебной дисциплины «Высшая математика», является развитие у студентов навыков построения и изучения математических моделей естественных процессов, происходящих в различных предметных научных и практических областях (в физике, технике, экономике, биологии и др.). При построении моделей динамических процессов, как правило, появляются производные, и такая модель представляет собой некоторую совокупность дифференциальных уравнений (дифференциальная математическая модель), требующих для своего решения знания методов решения дифференциальных уравнений. Большое количество такого рода моделей представлены в [1].

На кафедре высшей математики БГУ подготовлены и изданы учебные пособия [2–6], в которых наряду с основами математического анализа рассмотрен ряд примеров построения дифференциальных математических моделей. Так в [2] рассматривается задача о вынужденных колебаниях в среде без сопротивления. В [3] рассматриваются модели задач о распаде радиоактивного вещества, об изменении численности населения, об изменении биологической популяции в условиях конкурентной борьбы, об истечении жидкости. В [4] рассмотрена модель задачи об изменении структуры денежной массы, а также проводится построение и исследование модели равновесного рынка. В [5, 6] методы дифференциальных уравнений использованы при вычислении интегралов Дирихле и Лапласа.

На наш взгляд, предлагаемый подход при преподавании дифференциальных уравнений и математического анализа дает студентам возможность глубже усваивать знания соответствующих разделов фундаментальной математики.

Литература

1. Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. *Курс дифференциальных уравнений.* Мн.: Універсітэцкае, 1996.

2. Богданов Ю.С. *Лекции по математическому анализу.* Ч. 1. Мн.: Изд-во БГУ, 1974.

3. Богданов Ю.С., Кастрица О.А. *Начала анализа в задачах и упражнениях.* Мн.: Высшая школа, 1988.

4. Кастрица О.А. *Высшая математика для экономистов.* Мн.: «Новое знание»; М.: «ИНФРА-М», 2015.

5. Леваков А.А. *Математический анализ.* Мн.: БГУ, 2014.

6. Кастрица О.А., Мазаник С.А., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. *Математический анализ. Ряды и несобственные интегралы.* Мн.: Вышэйшая школа, 2015.

ПРИМЕР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ КУРСАНТОВ К ОЛИМПИАДЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

М.Н. Василевич, В.И. Яшкин

На Национальном этапе Международной олимпиады курсантов образовательных организаций высшего образования учитывалась профессиональная направленность математической подготовки. Как известно, теория игр помогает выбрать лучшие стратегии с учетом представлений о других участниках, их ресурсах и их возможных поступках. В связи с этим некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений рассматривались в сфере построения оптимальных стратегий. В качестве примера приведем дифференциальную модель теории игр, которая дает возможность развить умения интегрирования ОДУ.

Разведчика окружили шесть егерей. Егеря расположились в вершинах правильного шестиугольника, а разведчик находится в центре правильного шестиугольника. Разведчик может передвигаться со скоростью 5 км/ч, а егеря — 4 км/ч. Разведчик из радиоперехвата узнал, что начальник егерей отдал приказ двигаться прямо на разведчика. Как разведчик может уйти от погони?

Обозначим через t время в часах. Пусть в момент времени $t=0$ разведчик находился в центре симметрии шестиугольника, который совпадает с началом координат. В момент времени t разведчик будет находится в точке B с координатами $(0,5t)$, а ближайший егерь в точке $C(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Вектор скорости егеря

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right),\quad \vec{v}\parallel\overrightarrow{CB},$$

где $\overrightarrow{CB}=(0-x,5t-y)$. Тогда

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{-x}=\frac{dy(t)}{dt}\cdot\frac{1}{5t-y(t)},$$

$$\frac{dx}{dt}\cdot\Big(y(t)-5t\Big)=\frac{dy(t)}{dt}\cdot x. \tag{1}$$

По условию задачи $|\vec{v}|=4$. Таким образом, $\sqrt{x^2+y^2}=4$.

Пусть $u=\dfrac{x}{y-5t}$. Тогда $y-5t=\dfrac{x}{u}$ и из (1) следует

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}.$$

После преобразований получим

$$\frac{x}{u^2}\cdot\frac{du}{dt}=5;\quad \frac{du}{dt}=\frac{5u^2}{x}.$$

Таким образом,

$$y(t)=\pm\int\frac{1-C^2x^2}{2Cx}dx=\pm\frac{1}{2C}\ln|x|\mp\frac{C}{4}\,x^2+\frac{C_1}{2}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $y(t)\to+\infty$ при $x\to 0$, поэтому егерь никогда не достигает оси Oy, что означает — не догонит разведчика. Так как $x\neq 0$, то есть разведчик не находится на оси Oy. В силу произвольного выбора и равномерного распределения егерей получаем, что при условии оповещения о движении егеря, он всегда при указанных начальных скоростях выйдет из окружения.

Таким образом, разведчик всегда может уйти от окружения, если егеря не направлены на него при указанных скоростях.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

М.А. Глецевич, О.А. Кононова

Целью данных тезисов является изложение способа нахождения приближенного решения задачи Коши с помощью теоремы Пикара на практических занятиях по курсу «Дифференциальные и интегральные уравнения» на физическом факультете БГУ.

Теорема Пикара утверждает, что если функция $f(x,y)$ в области $D=\{(x,y): |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b\}$ удовлетворяет условиям: 1) определена и непрерывна, а следовательно, ограничена: $\exists M: |f(x,y)|\leqslant M$; 2) $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant L|y_2-y_1|$, где L-постоянная, (x,y_1) и (x,y_2) принадлежат области D (условие Липшица), то существует единственное решение задачи Коши $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$, определенное и непрерывно дифференцируемое в области $|x-x_0|\leqslant h$, где $h=\min(a,b/M)$. Решение задачи Коши при выполнении условий теоремы Пикара находится как предел при $n\to\infty$ равномерно сходящейся последовательности функций $\{y_n\}$, определенных рекуррентным соотношением

$$y_0(x)=y_0,\quad y_n(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_{n-1}(t))\,dt,\quad n=1,2,3,\dots$$

Оценка погрешности, полученной при замене точного решения $y(x)$ приближенным $y_n(x)$ выражается неравенством $|y(x)-y_n(x)|\leqslant M\,L^n\,h^{n+1}/(n+1)!$. На практических занятиях рассматриваются примеры, в которых условие Липшица равносильно ограниченности производной $\partial f/\partial y$ в рассматриваемой области.

Приведем некоторые примеры, предлагаемые на практических занятиях.

Пример 1. Для задачи Коши

$$y'=x^2+y^2,\quad y(0)=0$$

в области $D=\{(x,y): |x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1\}$ найти $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, сделать оценку $|y(x)-y_3(x)|$.

Р е ш е н и е. Найдем необходимые функции согласно приведенным выше рекуррентным формулам:

$$y_0(x)=0,\quad y_1(x)=\int\limits_0^x t^2\,dt=\frac{x^3}{3},\quad y_2(x)=\int\limits_0^x\left(t^2+\left(\frac{t^3}{3}\right)^2\right)dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x)=\int\limits_0^x\left(t^2+\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^7}{63}\right)^2\right)dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59235}.$$

Для того, чтобы провести оценку $|y(x)-y_3(x)|$, вычислим

$$M=\max_D|x^2+y^2|=2,\quad h=\min(1,1/2)=1/2,\quad L=\max_D|2y|=2.$$

Таким образом, получим, что на отрезке $|x|\leqslant 1/2$

$$|y(x)-y_3(x)|\leqslant\frac{ML^3h^4}{4!}=\frac{1}{24}.$$

Пример 2. Для задачи Коши

$$y'=y^2-3x^2-1,\qquad y(0)=1.$$

в области $D=\{(x,y):|x|\leqslant\frac{1}{2},|y-1|\leqslant 1\}$ найти $y_1(x)$, $y_2(x))$, сделать оценку $|y(x)-$ $-y_2(x)|$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру, получим:

$$y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+\int\limits_0^x(-3t^2)\,dt=1-x^3,$$

$$y_2(x)=1+\int\limits_0^x((1-t^3)^2-3t^2-1)\,dt=1-x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{x^7}{7}.$$

Для того, чтобы провести оценку $|y(x)-y_2(x)|$, вычислим

$$M=\max_D|y^2-3x^2-1|=3,\quad h=\min(1/2,1/3)=1/3,\quad L=\max_D|2y|=4.$$

Таким образом, получим, что на отрезке $|x|\leqslant 1/3$ имеет место оценка

$$|y(x)-y_2(x)|\leqslant\frac{ML^2h^3}{3!}=\frac{8}{27}.$$

Пример 3. Для задачи Коши

$$y'=y+e^y,\qquad y(0)=1.$$

в области $D=\{(x,y):|x|\leqslant 1,\ \ |y-1|\leqslant 1\}$ найти $y_1(x)$, $y_2(x)$, сделать оценку $|y(x)-y_2(x)|$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру, получим:

$$y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+(1+e)\int\limits_0^x dt=1+(1+e)x,$$

$$y_2(x)=1+\int\limits_0^x(1+(1+e)t+e^{1+(1+e)t})\,dt=\frac{1}{1+e}+x+\frac{(1+e)x^2}{2}+\frac{e^{1+(1+e)x}}{1+e}.$$

Для того, чтобы провести оценку $|y(x)-y_2(x)|$, вычислим

$$M=\max_D|y+e^y|=2+e^2,\quad h=\min\left(1,\frac{1}{2+e^2}\right)=\frac{1}{2+e^2},\quad L=\max_D|1+e^y|=1+e^2.$$

Таким образом, получим, что на отрезке $|x|\leqslant 1/(2+e^2)$ имеет место оценка

$$|y(x)-y_2(x)|\leqslant\frac{ML^2h^3}{3!}=\frac{(1+e^2)^2}{6\,(2+e^2)^2}.$$

О СПЕЦИФИКЕ РАССМОТРЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

И.А. Голубева, О.А. Мороз

Методика проведения практических занятий для студентов инженерно-строительных специальностей должна, прежде всего, учитывать основные цели математической подготовки студентов: уверенное овладение языком математики, выработка устойчивых навыков решения формальных задач, а также приобретение начальных навыков применения математического аппарата при решении прикладных задач инженерно-строительного содержания. В связи с этим практическое занятие должно включать в себя два обязательных элемента: опрос студентов по лекционному материалу, связанному с темой практического занятия, и решение задач.

Решение задач на практическом занятии должно преследовать следующие цели: освоение и более глубокое понимание теоретического материала, изложенного на лекции, выработка устойчивых практических навыков использования соответствующих теорем, методов и формул, а также знакомство с прикладными аспектами изучаемого материала. Первые две цели достигаются решением достаточно большого количества формальных задач, третья цель — решением задач прикладного характера, связанных как с общетехническими дисциплинами, так и с будущей специальностью студентов.

Задачи прикладного характера должны быть тщательно выверены, чтобы полученные результаты имели реальное содержание и не вызывали недоумения у студентов. Кроме того, такие задачи должны обязательно соприкасаться с теми общетехническими и специальными курсами, которые изучаются студентами данной специальности (задачи по квантовой механике вряд ли вызовут большой интерес у студентов строительного факультета). А это требование может быть выполнено только при установлении тесных межпредметных связей.

После решения формальных задач по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка» проводится завершающее занятие по применению этих уравнений к решению задач геометрии, механики, гидравлики, и так далее. Например, рассмотрим задачу из курса теоретической механики:

Задача. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

Решение. На движущуюся лодку действует сила $F = -kv$, где k — коэффициент пропорциональности. По закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение $F = m\dfrac{dv}{dt}$, откуда дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \tag{1}$$

Очевидно, что $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{k}{m}dt$ или $\ln v = -\dfrac{k}{m}t + C_1$. Потенцируя, получим общее решение уравнения (1):

$$v = e^{-kt/m}t + C_1 = e^{C_1}e^{-kt/m} = Ce^{-kt/m}.$$

Начальное условие: при $t = 0$ скорость $v = 20$ км/ч. Откуда $20 = Ce^{-k\cdot 0/m}$; $C = 20$. Тогда общий закон движения для данных условий задачи

$$v = 20e^{-kt/m}. \tag{2}$$

Дополнительное условие указывает, что при $t = 40\,\text{с} = 1/90\,\text{ч}$ скорость лодки составляет 8 км/ч. Отсюда $8 = 20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}}$ или $e^{k/m} = (5/2)^{90}$. Подставляя числовые данные задачи в найденный закон движения (2), учитывая при этом, что $t = 2\,\text{мин} = 1/30\,\text{ч}$, получим

$$v = 20\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right)^{-1/30} = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = 20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{32}{25} \approx 1,28.$$

Итак, скорость лодки спустя 2 мин снизится до величины 1,28 км/ч. Таким образом, на примерах из различных областей знаний показывается возможность и важность использования обыкновенных дифференциальных уравнений.

О ПРЕПОДАВАНИИ РАЗДЕЛА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» НА ФАКУЛЬТЕТЕ ВШУБ БГЭУ

Н.В. Денисенко, С.В. Майоровская

Факультет «Высшая школа управления и бизнеса» (ВШУБ) является ведущим факультетом Белорусского государственного экономического университета в области заочной и дистанционной подготовки специалистов с высшим образованием. Факультет осуществляет обучение по специальностям «мировая экономика»; «финансы и кредит»; «экономика и управление на предприятии»; «бухгалтерский учет, анализ и аудит»; «логистика»; «бизнес-администрирование»; «правоведение». Студенты всех указанных специальностей, кроме специальности «правоведение», на первом году обучения изучают предмет «Высшая математика», одним из важнейших разделов которого является раздел «Дифференциальные уравнения». Студенты ВШУБ уже имеют, по крайней мере, одно высшее образование, причем более половины их них являются дипломированными специалистами по техническим специальностям, а значит, основательно знакомы с дисциплиной «Высшая математика». В связи с этим традиционное изложение раздела «Дифференциальные уравнения» по схеме «лекция — семинар», при котором вопросы, связанные с практическим применением излагаемого материала, освещаются слабо или вовсе остаются не освещенными, представляется им малоинтересным. На первый план выходит связь изучаемого материала с математическим моделированием в экономике. Теория дифференциальных уравнений дает углубленное понимание эволюции процессов разной природы и служит средством для построения их математических моделей. К моделям, базирующимся на дифференциальных уравнениях, относятся модель естественного роста выпуска продукции, модель рынка с прогнозируемыми ценами, динамическая модель Кейнса, модель Самуельсона — Хикса, модель Ферхюльста роста выпуска продукции в условиях конкуренции, модель Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара, динамическая модель экономического роста, известная под название модели Солоу и др. Представляется особенно важной корректировка учебной программы курса с целью согласования ее с программами по предметам «экономическая теория», «макроэкономика» и «микроэкономика», излагаемым студентам ВШУБ. Если в прошедшие годы многие авторы учебников по указанным дисциплинам в малой степени использовали математический аппарат при анализе и описании различных экономических процессов, то в настоящее время ситуация изменяется в лучшую сторону, в том числе благодаря присоединению

Республики Беларусь к Европейскому пространству высшего образования. Таким образом, необходим профессионально ориентированный подход к преподаванию раздела «Дифференциальные уравнения» студентам экономических направлений. Представляется необходимым расширение указанного раздела посредством его дополнения различными актуальными для конкретных специальностей математическими моделями. Помимо аудиторной работы, посвященной изложению основных понятий и освоению техник интегрирования и способов решения простейших типов дифференциальных уравнений, студентам целесообразно предлагать задания для самостоятельной исследовательской работы — подготовки проекта по теме, связанной с экономическими приложениями теории дифференциальных уравнений. Для выполнения проекта студенты могут объединяться в группы до четырех человек. В процессе работы над проектом и его защиты студент получает представление о возможностях применения математического аппарата в экономических задачах и актуальных способах решения таких задач.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ «ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

А.Н. Исаченко, Л.А. Раевская

Существует значительное число математических моделей на основе дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, относящихся к различным предметным областям. Поскольку «Исследование операций» дисциплина непосредственно связанная с математическим моделированием, рассмотрение подобного рода моделей в ней является естественным. Типовые программы по исследованию операций традиционно включают разделы по теории игр, теории массового обслуживания, сетевому планированию, теории расписаний, управлению запасами, методам анализа сетей [1–3]. При этом теоретическая часть дисциплины включает аппарат дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных при рассмотрении систем массового обслуживания (система уравнений Колмогорова для однородной цепи Маркова с дискретным временем), анализе моделей управления запасами (для получения оптимальных уровней поставляемых и потребных партий ресурсов). Разделы, связанные с теорией игр, сетевым планированием, теорией расписаний, методами анализа сетей, как правило, не включают аппарат дифференциальных уравнений. Это связано с ограниченностью дисциплины по лекционным и лабораторным часам. Тем не менее, ознакомление студентов с динамическими моделями является обязательным, хотя бы в объеме основных понятий, методов и примеров.

В качестве динамических моделей рекомендуется рассмотреть дифференциальные игры, модели, возникающие в биологических системах, социально-политических системах, экономических системах, военном деле. Рассмотрение дифференциальных игр возможно на основе различных вариантов моделей задач преследования, начиная с простейших. Динамические модели также прекрасно иллюстрируются моделями Чейза — Осипова — Ланчестера, SIR-моделью, SZR-моделью, различными их обобщениями и аналогами. Варианты модели Леонтьева (одноотраслевая, многоотраслевая, открытая, замкнутая), модели Кейнса, модели Самуельсона — Хикса являются примерами динамических моделей экономики. Можно привести и другие примеры динамических моделей из различных предметных областей.

Объем, содержание, сложность материала для рассматриваемых классов динамических моделей и форма проведения занятий (лекции, лабораторные, контролируемая самостоятельная работа, учебное и контрольное тестирование), определяются приоритетами автора курса и уровнем учебных групп. Значимым является полнота излагаемого материала, от постановки задачи, теоретических основ, методов поиска решения и их реализации, до получения решения с его интерпретацией в терминах предметной области. Учитывая ярко выраженную прикладную направленность курса «Исследование операций», обязательным является выполнение серии лабораторных или индивидуальных работ по динамическим моделям. При этом существенным является привлечение современного информационно-программного инструментария для выполнения студентами лабораторных и индивидуальных работ с целью визуализации, правильной трактовки и интерпретации полученных результатов.

Литература

1. Исаченко А.Н. *Исследование операций в задачах: в 3 ч. Ч. 1. Математические модели. Теория игр.* Мн.: БГУ, 2010.

2. Исаченко А.Н. *Исследование операций в задачах: в 3 ч. Ч. 2: Сетевые задачи.* Мн.: БГУ, 2011.

3. Исаченко А.Н. *Исследование операций в задачах: в 3 ч. Ч. 3: Сетевое планирование, системы массового обслуживания, управление запасами.* Мн.: БГУ, 2013.

О СПЕЦКУРСЕ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Е.И. Каландия, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Спецкурс по математической дисциплине должен иметь следующие параметры:

— теория должна иметь богатую историю своего развития;

— спецкурс должен иметь богатое содержание (в теории должны быть содержательные и трудные теоремы, разделы);

— теория должна иметь широкие приложения;

— спецкурс должен иметь современную методическую отработку, методическое обеспечение;

— должны быть интересные и содержательные задачи, требующие своего разрешения.

Традиционно программа спецкурса охватывала основные разделы аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящее время следует изучать аналитическую теорию не только обыкновенных дифференциальных уравнений, но и аналитическую теорию уравнений в частных производных. Это стало возможным после распространения понятия свойства Пенлеве на уравнения с частными производными в 80-х гг. XX в.

Программой спецкурса предполагается показать студентам роль белорусских математиков в развитии аналитической теории дифференциальных уравнений, ее широкие приложения и перспективы.

В настоящее время по программе спецкурса «Аналитическая теория дифференциальных уравнений» 2 часа лекционных занятий и 8 часов практических занятий вынесено на управляемую самостоятельную работу.

В Гродненском государственном университете им. Я. Купалы приказом ректора № 1384 от 05.12.2016 утверждено положение об управляемой самостоятельной работе, а приказом ректора № 975 от 20.09.2016 утверждено положение о фонде оценочных средств. Для организации эффективной управляемой самостоятельной работы студентов разработан фонд оценочных средств в форме интерактивного тестирования. Фонд оценочных средств (ФОС) — это комплект методических и контрольно-диагностических материалов, предназначенных для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным или конечным требованиям образовательной программы для промежуточной, текущей и итоговой аттестации, а также для оценки остаточных знаний.

Задачами ФОС являются:

— контроль и управление процессом приобретения обучающимися необходимых знаний, умений и владений;

— оценка достижений обучающихся в процессе изучения учебной дисциплины;

— обеспечение соответствия результатов обучения задачам будущей профессиональной деятельности через совершенствование традиционных и внедрение инновационных методов обучения в образовательный процесс университета;

— создание для обучающихся и выпускников открытого банка ФОС, являющегося инструментарием для самооценки уровня достижения запланированных результатов;

— оценка способности обучающихся к творческой деятельности, их готовности вести поиск решения новых задач, связанных с недостаточностью конкретных специальных знаний и отсутствием общепринятых алгоритмов.

Наличие открытого банка ФОС в форме интерактивного тестирования позволяет нам всякий раз подобрать для каждого студента оригинальные индивидуальные задания с учетом его уровня подготовки, а также ускорить процедуру проверки усвоения теоретической и практической части изучаемого материала, минимизировать затраты времени преподавателя на проверку тестов.

Для наглядного примера приведем одно из заданий итогового теста (см. рисунок).

Рисунок.

Форма тестирования при организации управляемой самостоятельной работы студентов мотивирует студентов, развивает познавательный интерес, содействует выстраиванию каждым студентом собственной образовательной траектории в рамках самостоятельной работы.

По спецкурсу «Аналитическая теория дифференциальных уравнений» подготовлены учебные пособия [1, 2].

Литература

1. Бярозкіна Н.С., Мартынаў І.П., Пранько В.А., Яблонскі А.І. *Сістэмы дыферэнцыяльных ураўненняў у камплексным абсягу*: вуч. дапаможнік для студэнтаў фіз.-мат. спецыяльнасцей выш. навуч. устаноў. Гродна: ГрДУ, 1999.

2. Мартынов И.П., Березкина Н.С., Пронько В.А. *Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем*: пособие. Гродно: ГрГУ, 2009.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

А.В. Капусто, А.А. Кузнецова

Построение математических моделей прочно заняло свои позиции в технических, естественно-научных, экономических и социологических исследованиях. Большинство научных изысканий в разных областях содержат разработку или исследование соответствующей математической модели. Вследствие этого обучение математическому моделированию на протяжении изучения всего курса «Математики» из возможности становится необходимостью при формировании образовательной среды каждого высшего учреждения технического профиля. В конечном итоге это способствует реализации задачи, определяемой образовательным стандартом для выпускника технической специальности, который должен знать «основные математические методы решения инженерных задач» и «уметь строить математические модели физических процессов».

Математические модели, возникающие в описании процессов различной природы, часто инвариантны с точки зрения математики. В данном случае можно вспомнить слова А. Пуанкаре: «Математика — это искусство давать разным вещам одно наименование». Наибольшей наглядностью в плане иллюстрации универсальности математических моделей обладают дифференциальные уравнения (ДУ). Самым «простым» является ДУ с разделяющимися переменными $y' = ky$, общее решение которого задается функцией $y = ce^{kx}$. Вместе с тем именно с помощью данного уравнения можно получить закон изменения определенного явления (состояния вещества) во времени. В биологии и медицине с помощью этого уравнения можно описать скорость размножения бактерий с течением времени. Если обозначить количество бактерий, имеющихся в данный момент, через x, то скорость изменения составит $dx/dt = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Это же уравнение будет задавать зависимость массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени t. В социологических и экономических исследованиях таким ДУ описывают рост народонаселения, динамику роста цен при постоянной инфляции. Радиоактивный распад описывается также ДУ с разделяющимися переменными: $dx/dt = -Nx$, где dx — число распадов, произошедшее за короткий интервал времени dt, пропорционально числу атомов x в образце.

Большим потенциалом в методическом плане обладает классическая модель Лотки — Вольтерра взаимодействия двух популяций, которая наглядно демонстрирует порядок описания зависимостей, связей и свойств объектов с помощью математических структур. На примере модели Лотки — Вольтера наглядно иллюстрируются общие понятия качественной теории ДУ: фазовой плоскости, фазовых кривых, особых точек и их типов, а также порядка определения и анализа состояний равновесия для динамических систем первого порядка из двух дифференциальных уравнений.

На базе данной модели выполнен ряд ее модификаций, которые нашли приложения в различных сферах деятельности человека [1].

В заключение можно повторить слова известного математика А.А. Самарского: «Студента на вузовской скамье нужно обучать построению математических моделей своей науки. Именно таким путем математика должна прочно войти в его профессиональную деятельность». И одним из средств реализации данной установки является регулярное и целенаправленное привлечение аппарата ДУ к выполнению математического моделирования.

Литература

1. Вакульчик В.С., Капусто А.В. *Методологические аспекты обучения моделированию систем управления в физико-химических, биологических и экологических процессах с применением модели Лотки — Вольтерра и ее модификаций* // «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика». ФГБОУ ВО «ВГЛТУ», 2017. № 8. Ч. 1 (34-1). С. 74–77.

УЧИМ СТУДЕНТА УЧИТЬСЯ

Э.И. Ковалевская, О.М. Кветко

Старание в учебе у студента университета может объясняться его искренним интересом к предмету, большими амбициями, жаждой популярности у сокурсников или давлением со стороны родителей. Между тем, профессиональное будущее студента во многом зависит именно от того, какой мотив определяет его вовлеченность в учебу. При внутренней мотивации студенты учатся с удовольствием. Такие учащиеся часто стараются превзойти ожидания, сделать что-то сверх положенного. Многое зависит и от преподавателя, который должен поддерживать мотивацию студента, и от форматов обучения [1].

Но часто у студентов нематематических специальностей неизбежно возникает вопрос: «А зачем нам нужно изучать математику?» При этом рассуждения преподавателя о фундаментальности университетского образования, о пользе математики для развития логического, абстрактного, структурно-организованного мышления и так далее, хотя и без сомнения правильные, не вызывают энтузиазма у студентов. Учитывая, что время, отведенное на изучение предмета, весьма ограничено, далеко не все темы удается вместить в аудиторные часы. При этом, как правило, «за бортом» остаются вопросы, связанные с практическими приложениями того или иного раздела. Дифференциальное и интегральное исчисление — мощнейший инструмент описания математических моделей реальных процессов, однако студенты, получив этот инструмент, очень плохо представляют, каким образом его можно использовать в практической деятельности. Техника интегрирования достаточно сложна и многообразна, поэтому процесс обучения интегрированию различного рода функций и решению дифференциальных уравнений требует много времени. При этом из практических приложений рассматривается, разве что вычисление площадей плоских фигур и объемов тел [2]. Поиски содержательных применений интегрального и дифференциального исчислений — хорошая форма учебной работы, которая позволяет мотивировать студентов к изучению математики, проверить эрудицию и прочность знаний, развивает исследовательские навыки.

Каждый второй семестр учебного года на кафедре высшей математики Белорусского государственного аграрного технического университета (БГАТУ) начинается с подготовки студентов к выступлению на студенческой математической конференции, которая проводится в конце мая месяца. Преподаватели подбирают тематику, литературу, выбирают потенциальных участников. Некоторые из них почти сразу соглашаются, других приходится убеждать, что, кроме новых и более углубленных знаний, подготовка доклада и его презентация на конференции дают полезный опыт выступления перед большой аудиторией, формируют умение отвечать на неожиданные вопросы и ориентироваться в незнакомой обстановке.

Часто предлагаем нашим студентам темы, связанные с приложениями обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ) к решению задач в области техники, экономики, экологии и других социальных науках.

Студентам экономических специальностей, например, было предложено рассчитать, какая сумма V окажется на счете в банке спустя t лет, если P — начальная сумма денежного вклада под процентную ставку r с капитализацией. Учитывая, что dv/dt — скорость изменения суммы вклада со временем t, студенты использовали диференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = rV.$$

Решение данного уравнения $V = Pe^{rt}$ позволило вычислить искомую сумму. Студенты с интересом сравнили возможные варианты денежных вложений одного из банков. Так, рассчитав доходность по вкладам со ставкой в 10,5%, которые будут выплачены в конце срока, и по вкладам с ежемесячной капитализацией при ставке 10% годовых, получили следующее: при небольшой сумме начального вклада, прибыль получится примерно одинаковой, так как, зарабатывая на капитализации, скорее всего, происходит потеря на процентной ставке. Если же одинаковые ставки по вкладам с капитализацией процентов и без нее, то прибыль получится больше в первом случае. А если нет, то будет лучше подумать о вкладе с меньшими опциями, но с большим процентом.

Далее рассмотрим, как на примере подготовки докладов по темам «Парабола безопасности» [3, 4] или «Законы Кеплера движения планет» [3], которые связаны с решением ДУ, можно учить студента учиться и, следовательно, развивать в нем черты исследователя и формировать творческую личность.

Итак, студент, изучая первую тему и вникая в суть физического закона полета снаряда, узнает, что его движение описывается определенным ДУ, решение которого дает раздел математики «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Именно, решением уравнения является семейство парабол. И далее появляется понятие *парабола безопасности*, которое используется в военном деле.

Изучая вторую тему, студент узнает, что и другие кривые второго порядка — эллипс и гипербола — появляются, как решения соответствующих ДУ, и являются траекториями движения планет и комет.

Таким образом, тот учебный материал, который студент изучал в 1-м семестре, — кривые второго порядка и их свойства — нашел применение в артиллерии и астрономии, т.е. в конкретных областях жизни нашего общества. Этот факт становится стимулом хорошо учить дальнейшие темы программы и углублять свои познания в приложениях математики.

Теперь посмотрим, что представляет собой общее уравнение кривой второго порядка. Это — алгебраическое уравнение 2-й степени. Но существуют также уравнения 3-й, 4-й и т.д. степеней. Ставим вопрос: какие кривые возникают здесь? Какими свойствами они обладают? Где используются? ...

С другой стороны, спрашиваем: что известно о кривых, задаваемых тригонометрическими функциями, например, $y = \sin x$, $y = \cos x$? Будут ли они алгебраическими?

Снова идет поиск ответа, и студент узнает, что это — трансцендентные кривые. А где они используются? Какие явления можно описать такими кривыми?

Таким образом, цепочка вопросов удлиняется. Получая ответы, студент узнает все новые факты из математики и ее приложений. Понятно, что при подготовке конкретного доклада, приходится остановиться в некотором месте этой цепочки и тщательно оформить полученные сведения. Возможно, что при этом студент решит некоторые поставленные математические задачи той или иной степени трудности. Но процесс его познания не завершится этой остановкой, если в нем зародился творческий огонек исследователя. Он может пойти дальше: самостоятельно или под руководством преподавателя изучать известное и открывать новое. И пожелаем ему настойчивости и успехов.

Преподаватель может мотивировать студента к изучению математики, пробуждать в нем интерес через предложение содержательных задач практического плана. Участвуя в университетской конференции, студент не только задает вопрос «зачем изучать?», но и в процессе работы над проектом самостоятельно отвечает на него. Такая форма организации учебной работы способствует усилению познавательного интереса студентов, требует большей самостоятельности в учебном процессе, способствует более глубокому усвоению материала.

Литература

1. Соболевская О.В. *Мотивация студентов к учебе влияет на их перспективы* // Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» [электронный ресурс] / Научно-образовательный портал IQ / Новости; ред. Моисеев В. Электрон. дан. М.: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 2015.— Режим доступа: https://iq.hse.ru/news/177664243.html, свободный.

2. Балабаева Н.П. *Профессионально-ориентированный подход к преподаванию раздела «дифференциальные уравнения» студентам экономических направлений* // Самар. науч. вестн. 2014. № 4 (9). С. 22–25.

3. Амелькин В.В. *Дифференциальные уравнения в приложениях.* М.: Наука, 1987.

4. Маркушевич А.И. *Замечательные кривые.* М.: Наука, 1978.

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.В. Коноплева, Л.В. Миронова, Н.С. Знаенко

Формирование межпредметных связей является одним из принципов конструирования учебного процесса, а также средством обучения. Оно стимулирует лучшее усвоение материала, развитие интереса к предмету, повышает качество знаний. Для курсантов и студентов УИГА, обучающихся по направлению подготовки «Аэронавигация», преподаватели математики выработали приемы практического применения математических методов при решении задач летной эксплуатации воздушных судов [1, 2], позволяющие активизировать учебный процесс и усилить мотивацию изучения курса математики.

Многочисленные приложения математических методов к решению естественнонаучных и профессиональных задач особенно удачно демонстрируются при изучении раздела «Дифференциальные уравнения». Дифференциальные уравнения широко используются для описания и моделирования различных процессов и поэтому активно используются при изложении специальных дисциплин и в научно-исследовательской работе курсантов.

Из-за сокращения часов на изучение математики на лекциях и практических занятиях невозможно уделить достаточно времени для решения практических задач. Поэтому для выработки навыков составления и решения дифференциальных уравнений в различных прикладных задачах на кафедре используются учебные пособия [3, 4], предназначенные для аудиторной и самостоятельной работы.

Прикладная направленность курса дифференциальных уравнений легко иллюстрируется на простых примерах. Известно, что при полете воздушного судна на эшелоне ветер оказывает существенное влияние на путевую скорость, угол сноса, а значит, на дальность и продолжительность полета. Исследовать изменение траектории полета в зависимости от скоростей самолета и бокового ветра, направления полета и направления ветра можно при решении задачи, описываемой однородным дифференциальным уравнением 1-го порядка. Простейший случай дивергенции крыла самолета является примером при изучении линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка; решение систем ОДУ позволяет проводить анализ химических реакций нефтепродуктов и авиационного топлива с помощью математических методов; моделирование процесса распространения рекламы (логистическое уравнение или уравнение Нерлова — Эрроу) позволит ответить на различные вопросы, связанные с эффективностью рекламы и т.д.

Использование компьютерных технологий на аудиторных занятиях позволяет заниматься простейшим моделированием. Программы компьютерной математики дают возможность создавать «живые чертежи», исследовать частные решения ОДУ, строить их графики, показывать, как изменяются интегральные кривые при изменении числовых параметров, входящих в уравнение и начальных условий, а это наглядно подводит студентов к понятию устойчивости решений ОДУ и к осознанному использованию численных методов.

Литература

1. Знаенко Н.С., Коноплева И.В., Миронова Л.В. *Модель формирования общепрофессиональных компетенций посредством реализации межпредметных связей на примере обучения математике* // Информационные технологии в образовании. Сб. науч. тр. УлГПУ. Ульяновск, 2017. С. 116–122.

2. Знаенко Н.С., Коноплева И.В., Миронова Л.В. *Междисциплинарные связи как способ повышения мотивации изучения математики* // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании. Сб. науч. тр. Межд. научно-техн. конф. Ульяновск, УлГТУ, 2016. С. 235–240.

3. Зорькина Н.В., Коноплева И.В., Миронова Л.В., Никонова С.П. *Математика. Дифференциальные уравнения.* Уч. пособие. Ульяновск: ФГБОУ ВО УИ ГА, 2017. 120 с.

4. Самохина С.С., Никонова С.П., Зорькина Н.В., Миронова Л.В. *Применение математических методов для решения физических задач.* Учеб. пособие: в 2 ч. Ч. 1, Ч. 2. Ульяновск: УИ ГА, 2016, 2017.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ В КУРСЕ «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»

Е.А. Крушевский, Е.Е. Крушевская, А.В. Стрелюхин

Изучение курса строительной механики в технических университетах построено по принципу опоры каждой темы на предыдущие, ранее изученные в смежных дисциплинах. Понятно, что дифференциальные уравнения при этом играют одну из самых значительных ролей. Рассмотрим конкретные примеры.

В качестве первого примера ([2]) рассмотрим задачу Коши, которой описываются вынужденные колебания системы с одной степенью свободы в среде с коэффициентом сопротивления b. В частности, рассматривается однопролетная балка жесткости r с точечной динамической нагрузкой $P = P(t)$ в виде дополнительно установленного на ней устройства массой m. Такая задача сводится к дифференциальному уравнению 2-го порядка $m\ddot{y} + b\dot{y} + ry = P(t)$ с начальными условиями (задача Коши) $y(t_0) = y_0$ (начальное перемещение установленного устройства) и $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$ (начальная скорость).

Студентам предлагается решить данную задачу несколькими способами, в том числе и с помощью компьютерной системы (например, Wolfram Mathematica). Во-первых, можно решить данную задачу через подстановку Эйлера и далее, применив метод вариации, получить общее решение неоднородного уравнения. Начальные условия позволяют однозначно определить произвольные константы. Во-вторых, точное решение также можно найти с помощью встроенной в систему процедуры DSolve. Интерес для студентов представляет поиск соответствия данного решения с ранее полученным аналитическим (исключение машинных нулей и функциональных погрешностей, которые нередко возникают при символьных вычислениях).

Приближенное решение можно получить одним из методов, указанных в [1]. Кроме того, процедура NDSolve позволяет провести численное интегрирование данного уравнения (причем с возможностью задания метода и шага), результатом которого является таблица значений решения. Во всех случаях студентам предлагается построить графики всех полученных решений на одном чертеже (процедура Show), а видимое расхождение на графиках как раз и показывает наличие разноообразных погрешностей (вычислений, самих методов и т.д.).

Еще один пример ([2]) связан с задачей о прогибе упругого стержня длины l постоянного поперечного сечения с жесткостью на изгиб $EJ = \mathrm{const}$, загруженного поперечной нагрузкой $q(x)$ и сжатого силой P. Данная задача представляет собой линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка $EJy^{IV} + Py' = q(x)$ с зависящими от условия закрепления стержня начальными условиями задачи Штурма — Лиувилля.

Студентам предлагается упрощенная модель в виде уравнения $y'' + ky = f(x)$ с граничными условиями (типа Штурма — Лиувилля) $y(0) = y(l) = \mathrm{const}$. Решение следует найти несколькими способами: с помощью процедур DSolve (здесь студенты знакомятся со специальными функциями, пытаясь понять и интерпретировать ответ) и NDSolve, а также, применив простейшую разностную схему. Все полученные решения строятся на одном графике и подвергаются анализу по оцениванию имеющихся погрешностей.

Литература

1. *Математика: Лабораторные работы для студентов строительных специальностей*: в 4 ч. / сост.: В.Ф. Бубнов, В.В. Веременюк, Е.А. Крушевский, А.А. Кузнецова. Мн.: БНТУ, 2011. Ч. 1.

2. *Численные методы решения задач строительства: Лабораторный практикум для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»* / сост. А.В. Стрелюхин, Г.С. Богомолова, Е.Л. Сорокина. Мн.: БНТУ, 2016.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КАФЕДРЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ФПМИ БЕЛГОСУНИВЕРСИТЕТА

А.А. Леваков, С.А. Мазаник, Г.П. Размыслович

У истоков исследований по асимптотической теории дифференциальных уравнений в Беларуси стояли академик Н.П.Еругин и профессор Ю.С. Богданов, в настоящее время эти исследования ведутся под руководством академиков Н.В. Гайшуна и Н.А. Изобова. В рамках выполнения заданий ГПНИ в 2000–2018 гг. сотрудниками кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики БГУ получен ряд результатов по теории обыкновенных дифференциальных, стохастических и алгебро-дифференциальных систем [1–3]. А именно, получены теоремы существования слабых, сильных, жизнеспособных решений и решений с отражением от границы для стохастических дифференциальных уравнений и включений с измеримыми правыми частями. Показано, что центральный показатель линейной невозмущенной дифференциальной системы является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя возмущенной системы со случайными возмущениями. Исследована эквивалентность линейных систем системам с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами относительно группы преобразований Ляпунова, а также относительно преобразований асимптотически близких к постоянным. Доказана незамкнутость бесконечно дифференцируемых систем Лаппо-Данилевского размерности больше двух во множестве линейных систем. Построены достаточные условия существования и единственности ограниченного на числовой прямой решения слабо нелинейной системы с линейным L^p-дихотомичным на оси приближением, а также описано множество ограниченных решений в случае, если линейное приближение обладает L^p-дихотомией на полуосях с различными проекторами. Установлена неустойчивость нулевого решения слабо нелинейной системы в случае L^p-дихотомии линейного приближения с ненулевым вторым проектором в определении L^p-дихотомии. Указан метод явного вычисления отображения за период для линейных систем с блочным строением отображающей матрицы. Установлено условие инвариантности максимального нижнего показателя линейной системы при экспоненциально убывающих возмущениях. Для линейных регулярных дифференциально-алгебраических систем с n-раз дифференцируемой неоднородностью доказаны критерии разрешимости начальных задач. Для линейных каузальных дифференциально-алгебраических систем получен критерий управляемости на подпространство.

Построена общая теория стохастических дифференциальных систем: доказаны теоремы существования слабых и β-слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с измеримыми правыми частями и с частично вырожденным оператором диффузии; установлены теоремы о непрерывной зависимости слабых решений и моментов взрыва от начальных условий для стохастических дифференциальных уравнений; найдены новые условия потраекторной единственности и бесконечной продолжимости вправо слабых решений стохастических дифференциальных систем; доказан аналог теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости для стохастических дифференциальных уравнений; получены оценки функционалов от решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений; доказаны теоремы существования слабых решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с разрывными правыми частями и теорема существования решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа с измеримыми правыми частями в гильбертовом пространстве; установлена теорема о зависимости решений от начальных условий и правых частей для стохастических эволюционных уравнений параболического типа с измеримыми коэффициентами.

Получены условия эквивалентности по Ляпунову линейных систем при экспоненциальных возмущениях. Определен инвариант преобразования Ляпунова — коэффициент приводимости линейной системы — как общее значение коэффициента и показателя асимптотической эквивалентности этих систем при экспоненциально малых возмущениях и исследовано его поведение при различных типах экспоненциально малых возмущений. Построены оценки сверху характеристических показателей Ляпунова нетривиальных решений систем дифференциальных уравнений из множеств Коппеля-Конти $L^P S$, $p > 0$, устанавлиающие экспоненциальную устойчивость этих систем. Доказана экспоненциальная устойчивость нулевого решения слабо нелинейных систем с линейным приближением из этих множеств при $p \geqslant 1$ и построены оценки сверху характеристических показателей решений этих систем. Получены оценки снизу характеристических показателей Ляпунова нетривиальных решений систем множеств $L^P N$ при $p \geqslant 0$, из которых следует неустойчивость нулевого решения как этих систем, так и слабо нелинейных с линейным приближением из множеств $L^P N$ при $p \geqslant 1$. Установлены границы нижних показателей Перрона нетривиальных решений и их возможного взаимного расположения с характеристическими показателями Ляпунова систем множеств $L^P N$. Построены оценки характеристических показателей Ляпунова нетривиальных решений линейных систем с L^P-дихотомией на полуоси, $p > 0$. Выделены во множествах $L^P D$ подмножества $L^P_k D$, для которых L^P-дихотомия реализуется на парах проекторов P_1 и P_2 таких, что $\operatorname{rank} P_1 = k$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Доказано свойство открытости этих подмножеств относительно равномерно малых возмущений в множестве $L^P D$ при $p \geqslant 1$. Установлено существование асимптотически устойчивых линейных дифференциальных систем из множества систем Коппеля — Конти с произвольно заданными конечными характеристическими показателями, совершающими бесконечный скачок вниз под действием экспоненциально убывающих линейных возмущений. Получены различные критерии существования решений, условной, полной и H-управляемости линейных сингулярных систем управления.

Исследованы свойства множеств неприводимости и предельных множеств неприводимости линейных дифференциальных систем как функций параметров, характеризующих линейные возмущения и ограниченность коэффициентов систем. Установлены критерий открытости слоений множеств L^P-дихотомичных систем и их разрушение при интегрально малых возмущениях. Построены коэффициентные признаки интегральной дихотомии и критерий экспоненциальной дихотомии дифференциальных треугольных двухмерных систем специального вида. Установлена грубость свойств L^p-дихотомии на оси линейной дифференциальной дихотомии и негрубость этого свойства при абсолютно интегрируемом возмущении и возмущении, отличном от нуля лишь на сколь угодно малом промежутке. Получены различные условия спектральной приводимости и регуляризируемости систем с запаздыванием, не разрешенных относительно производных, а также общих стационарных дифференциальных систем управления, допускающих операторную запись. Получены необходимые и достаточные условия различных видов управляемости на подпространство одной нерегулярной и регулярных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями по управлению и систем с распределенным запаздыванием по управлению. Доказаны теорема существования мартингальных решений смешанной задачи для стохастических гиперболических уравнений с измеримыми локально ограниченными коэффициентами и с запаздыванием, теорема существования мартингальных решений абстрактных стохастических параболических и гиперболических уравнений с разрывными и неограниченными коэффициентами. Получены оценки функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений и с помощью этих оценок получены новые теоремы существования решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывным оператором диффузии. Доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости, о существовании аттракторов полудинамических систем в нелокально компактных метрических пространствах. Исследованы особенности метода знакопостоянных функций Ляпунова для стохастических дифференциальных уравнений и получены новые теоремы об асимптотической устойчивости этих уравнений.

Полученные результаты исследований по дифференциальным уравнениям тесно связаны с учебным процессом на ФПМИ и ММФ БГУ и используются при чтении лекций и спецкурсов на кафедрах высшей математики, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, оптимального управления и др.

Литература

1. Леваков А.А., Мазаник С.А., Размыслович Г.П. *Асимптотические характеристики решений динамических систем.* // Выбраныя навуковыя працы БДУ: у 7 т. Т. 6. Матэматыка. Мн., 2001. С. 323–355.

2. Леваков А.А., Мазаник С.А., Размыслович Г.П. *Асимптотические свойства динамических систем* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 3. С. 97–102.

3. Леваков А.А., Мазаник С.А., Размыслович Г.П. *Асимптотические свойства линейных, стохастических и дифференциально-алгебраических систем* // Вестн. БГУ. 2016. Сер. 1. № 3. С. 125–142.

РАЗДЕЛ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ» В КУРСЕ «МАТЕМАТИКА» В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

А.В. Метельский, Е.А. Федосик, Н.И. Чепелев

На изучение данного раздела в стандартной учебно-методической карте дисциплины «Математика» отводится всего 12 часов $(6+6)$. Можно и нужно обсуждать эту ситуацию, но поскольку мы не в состоянии ее изменить, то лучше обсудить содержание этого раздела. Необходимо привести основные определения, касающиеся дифференциальных уравнений в частных производных, сформулировать основные задачи уравнений математической физики (УМФ), дать студентам представление о методах их решения. Думается, что за это сверхограниченное время нужно рассмотреть следующие вопросы и расставить следующие акценты.

1. Основные определения теории УМФ. Дать определение дифференциального уравнения в частных производных, его порядка и определение решения, подчеркнув, что здесь решение — это функция многих переменных, определенная в некоторой области, в отличие от решения обыкновенного дифференциального уравнения.

2. Основные УМФ. Здесь нужно продемонстрировать вывод волнового уравнения, привести уравнение теплопроводности и уравнение Лапласа, указав их происхождение. Разумеется, следует пояснить физические величины, учитываемые при выводе этих уравнений и физический смысл их решений. Приводя уравнение Лапласа, конечно, следует напомнить определение гармонического поля и отметить, что действительная и мнимая части функции комплексной переменной, аналитической в области, удовлетворяют уравнению Лапласа.

3. Классификация линейных УМФ 2-го порядка. Дать классификацию таких уравнений и назвать типичных представителей для каждого класса.

4. Постановка основных краевых задач и методы их решения. Предлагается для трех основных УМФ: волнового, теплопроводности и Лапласа изучить такие задачи.

4.1. Сформулировать краевую задачу для уравнения колебаний струны с фиксированными концами и задачу Коши для бесконечной струны, подчеркнув наличие граничных условий в первом случае. Дать решение задачи Коши для волнового уравнения методом Даламбера (методом замены переменных).

4.2. Разобрать решение задачи Коши для уравнения распространения тепла в бесконечном стержне методом Фурье. Тем самым мы «оживляем» теорию рядов и интеграла Фурье. Привести решение краевой задачи для полубесконечного стержня с нулевым начальным условием операционным методом. Подчеркнуть, что операционным методом можно решать не только типовые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

4.3. На практическом занятии познакомить студентов с методом сеток на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике. Пояснить замену дифференциального уравнения разностным уравнением. Отметить, что погрешность приближенного решения, полученного методом сеток, складывается из погрешности аппроксимации дифференциального уравнения разностными и погрешности, возникающей в результате приближенного решения системы разностных уравнений. Разобрать понятия устойчивости и сходимости разностной схемы. Здесь студенты получают представление не только о методе сеток для решения УМФ, но и о применении вычислительной техники для численного решения прикладных задач, а также о возникающих при этом вопросах и проблемах.

Таким образом, даже при кратком изучении раздела «Элементы теории УМФ», есть возможность расширить у студентов представление о круге задач, изучаемых в курсе математики, подчеркнув их связь с конкретными физическими задачами, усилить представление о прикладной направленности курса математики в целом. И, главное, — раздел «Элементы теории УМФ» предоставляет возможность показать полезность ранее изучавшихся математических конструкций и методов для решения сложных и практически значимых задач.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОНЯТИЙНЫХ КАРТ И БЛОК-СХЕМ В ПРОЦЕССЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.П. Пучков, Н.И. Лобанова

Раздел «Дифференциальные уравнения» является наиболее значимым в программе математических дисциплин технического вуза, так как лежит в основе развития способностей математического моделирования. Решение дифференциальных уравнений — довольно сложный и объемный курс математики, и успешность его изучения во многом определяется качеством проведения начальных занятий: насколько обучаемые найдут общий язык с обучающими (будут понимать друг друга, иметь общий тезаурус) и насколько обучаемым покажется значимой теория дифференциальных уравнений для решения инженерных задач.

Начальные разделы теории дифференциальных уравнений целесообразно изучать на основе практико-ориентированного подхода, связывающего их с другими науками посредством сюжетов или явлений реальной действительности. Для глубокого усвоения любого раздела изучаемой дисциплины, обучаемому важно, если это возможно, иметь ясное представление о структуре этого раздела, понимать и видеть этапы его возникновения, становления и развития. Все это можно продемонстрировать на примере классической теории дифференциальных уравнений первого порядка, являющей собой естественный непосредственный переход от дифференциального и интегрального исчислений (без привлечения дополнительных вспомогательных сведений из других разделов математики) к решению достаточно непростых квазипрофессиональных задач инженерной деятельности.

Важную роль для глубокого и ясного понимания основных тем из начальных разделов теории дифференциальных уравнений играют Понятийные Карты и тесно связанные с ними блок-схемы решения этих уравнений. Понятийные Карты — пространственные построения, требующие от студентов тщательного выявления глубинной структуры изучаемого материала. С их помощью можно отразить структуру знаний студента и показать, как новая информация встраивается в то, что уже известно студенту. Это простой инструментарий для обнаружения понимания или непонимания в изучении фундаментальных понятий. [1]

Студенты должны непременно владеть способностями составлять Понятийные Карты; научить их этому — первая задача преподавателя. Вторая задача преподавателя — создать систему оценки качества составления студентами Понятийных Карт (как количественным, так и качественным способом), вводя соответствующие критерии. Студенты разрабатывают индивидуальные Понятийные Карты, где должны сочетаться оба компонента критического мышления: деятельностный, направленный на отражение глубинной структуры учебной темы и оценочный, позволяющий вести для нее качественный отбор фрагментов. Овладение навыками составления Понятийных Карт должно сопровождаться оценкой роста учебных достижений студентов как элементами обратной связи для их совершенствования.

Понятийные Карты можно рассматривать как эффективное средство повышения качества учебного процесса. Преподавателям они дают возможность контролировать развитие глубинной структуры знаний каждого студента, визуализировать изначальную структуру понятий студентов, обнаружить возможные неправильные представления в ней и скорректировать их в ходе учебного процесса. Студентам они помогают понять учебный материал, сформировать глубинную структуру собственных знаний по отдельным темам и по предмету в целом, что, в свою очередь, способствует долговременному запоминанию.

Как показал опыт нашей работы, первая карта должна быть посвящена теме «Основные понятия дифференциальных уравнений». Важным аспектом здесь является иерархическая структура карты: наиболее общие и значимые понятия находятся наверху карты, по мере «снижения» ранг представленных понятий уменьшается. Второй может быть карта «Основные классы дифференциальных уравнений», ориентированная на запоминание вида основных классов таких уравнений и принятого порядка их изучения.

С Понятийными Картами тесно связаны блок-схемы (алгоритмы), которые в отличие от них, представляют методы интегрирования основных классов дифференциальных уравнений. Значимым является способность обучаемых уметь составлять дифференциальные уравнения, описывающие реальные явления, с которыми приходится сталкиваться в повседневной жизни. Здесь необходимой для демонстрации значимости является блок-схема по теме «Практические приложения дифференциальных уравнений».

Весьма целесообразным является наполнение содержания самостоятельной работы обучаемых заданиями по разработке индивидуальных Понятийных Карт и блок-схем по пройденным темам с целью выработки устойчивых навыков в этой работе.

Овладение навыками составления Понятийных Карт по учебной дисциплине «Дифференциальные уравнения» организовывалось нами на двух образовательных уровнях: в Центре внешкольной работы г. Зеленокумска Ставропольского края (дополнительное общее среднее образование) и на инженерных факультетах Тамбовского государственного технического университета (высшее образование). Обучающимися самостоятельно разрабатывалось по восемь Понятийных Карт и блок-схем, охватывающих соответствующие разделы курса:

1. Основные понятия дифференциальных уравнений;
2. Основные классы дифференциальных уравнений;
3. Дифференциальные уравнения первого порядка;
4. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним;
5. Линейные однородные и неоднородные уравнения;
6. Уравнения в полных дифференциалах и приводящиеся к ним;
7. Геометрические задачи, приводящиеся к дифференциальным уравнениям;
8. Физические задачи, приводящиеся к дифференциальным уравнениям.

Результаты внедрения этой методики привело к заметному повышению качественной успеваемости обучающихся и отсутствию каких-либо сложностей владения понятийным аппаратом.

Авторы пришли к выводу, что применение Понятийных Карт и блок-схем с целью достижения целостности знаний обучаемых, обеспечивает их глубину, прочность, осознанность, связывает с другими разделами математики в рамках осуществления принципов непрерывности, преемственности и системности образования.

Литература

1. Халперн Д. *Психология критического мышления.* СПб.: Изд-во «Питер», 2000.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Г.П. Размыслович, А.В. Филипцов

Как известно, одной из форм представления фундаментальной матрицы линейного стационарного векторного уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с вещественной матрицей A является матричная функция e^{At}. Однако построение матричной экспоненты имеет ряд определенных трудностей. Например, для применения классического метода построения матрицы e^{At}, основанном на использовании жордановой нормальной формы матрицы A, необходимо знать собственные значения матрицы A. Но точное вычисление собственных значений не всегда возможно. Вместе с тем, во многих физических задачах, в частности, в теории управления, возникает необходимость найти значение фундаментальной матрицы в некоторой фиксированной точке $t = t_1$.

В настоящем докладе излагается метод нахождения матрицы e^{At_1} с заданной точностью ε без нахождения собственных значений матрицы A. Так как матричная экспонента e^{At_1} является суммой сходящегося ряда $\sum_{i=0}^{\infty}(At_1)^i/i!$, то для любого $\varepsilon \geqslant 0$ существует номер $N = N(\varepsilon, t_1)$ такой, что для всех $m \geqslant N$ выполняется неравенство

$\|e^{At_1} - \rho_m(At_1)\| \leqslant \varepsilon$, где $\rho_m(At_1) = \sum_{i=0}^{m} (At_1)^i/i!$, причем номер N удовлетворяет условию [1]

$$e^{\|A\|t_1} \frac{(\|A\|t_1)^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 - \frac{\|A\|t_1}{N+2}\right)^{-1} \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, по заданному ε можно определить номер N для которого выполнено сравнение $\rho_N(At_1) \approx e^{At_1}$ с заданной точностью. Однако число N может оказаться настолько большим, что нахождение матрицы $\rho_N(At_1)$ с использованием прямого суммирования может вызвать вычислительные трудности. Поэтому для случая, когда число N значительно превосходит порядок матрицы A будет более эффективным предлагаемый ниже метод.

Если многочлен $\Delta(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^{k-i}$ является аннулирующим многочленом матрицы A, то многочлен $\tilde{\Delta}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} (a_i t_1^i) \lambda^{k-i}$ является аннулирующим многочленом для матрицы At_1. Следовательно, при $\lambda = At_1$ значение многочлена $\rho_N(\lambda) = \sum_{i=0}^{N} \lambda^i/i!$ будет совпадать с значением многочлена $r(\lambda)$, являющегося остатком при делении $\rho_N(\lambda)$ на $\tilde{\Delta}(\lambda)$, то есть $\rho_N(At_1) = r(At_1)$. В случае, если в качестве аннулирующего многочлена $\Delta(\lambda)$ выбран характеристический многочлен матрицы A, степень многочлена $r(\lambda)$ не превосходит порядок матрицы A.

Отметим, что любая матрица A подобна матрице Фробениуса, для которой построение характеристического многочлена не вызывает трудностей и для вычисления элементов матрицы $r(At_1)$ могут быть получены рекуррентные соотношения [2].

Литература

1. Balabanian N., Bickart T.A. *Electric Network Theory.* New York: Wiley, 1969.
2. Мазаник С.А., Размыслович Г.П., Ширяев В.М. *Функции от матриц.* Мн.: БГУ, 2002.

ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ПО КУРСУ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Л.В. Станишевская, Н.В. Шамукова

Математика является мощным средством решения различных прикладных задач. Специалисты-математики пользуются повышенным спросом в любой отрасли промышленности, так как они умеют логически мыслить, умеют работать с новым материалом, классифицировать его и т.д.

Математика, как учебная дисциплина, прочно заняла место в учебных планах всех экономических специальностей Белорусского государственного экономического университета. Процесс усвоения знаний и соответствующих им умений является одним из важнейших этапов обучения, основной целью и главным результатом учебной деятельности. Но для успешного усвоения курса высшей математики, служащего фундаментом экономического образования, недостаточно отводимого количества лекционных и практических часов. Для действительного усвоения знаний студентом необходима работа, направленная на закрепление знаний, на их усовершенствование.

Преподаватели кафедры высшей математики БГЭУ для закрепления материала используют коллоквиумы, практические занятия, контрольные работы, дидактические материалы, тематические сообщения и, конечно же, тестирование.

Тестовое движение набирает темпы во всем мире. Наша республика также не является исключением. Путем проведения централизованного тестирования проводится прием в высшие учебные заведения в Республике Беларусь.

Тесты используются в БГЭУ и как форма контроля знаний студентов дневной формы обучения, и как допуск студентов к сдаче зачетов и экзаменов на заочной форме обучения. Тесты представляют собой систему вопросов и заданий, предполагающих наличие кратких и однозначных ответов. Используются открытые и закрытые тесты. Суть закрытых тестов состоит в выборе правильного ответа из нескольких предложенных вариантов. Открытые тесты основаны на принципе дополнения недостающей смысловой единицы, установления соответствия между группами смысловых единиц или правильной последовательности их изложения. Содержание тестов должно включать в себя такие задания, в которых используются результаты выполнения предыдущих заданий. Предлагаемые тесты должны также включать в себя задания, в процессе выполнения которых студент овладевает технологией решения, усваивает новые операции и приемы умственных действий. Кроме того, в ходе работы с тестами студент переносит ранее усвоенные операции, знания и приемы на новый материал. При выполнении теста студент конструирует нужную последовательность действий, выбирая их из предложенного списка.

Таким образом, тесты можно рассматривать как средство проверки и оценки знаний студентов. Тест позволяет получить объективную информацию о степени освоения учебного материала, своевременно выявить недостатки и проблемы в знаниях. Результаты тестирования позволяют студенту адекватно оценить свои знания, критически отнестись к своим учебным достижениям.

Раздел «Дифференциальные уравнения» входит в программу общего курса высшей математики для студентов 1-го курса всех факультетов БГЭУ. Приведем пример теста, как этап промежуточного контроля знаний студента по теме «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка» и «Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка».

1. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

Варианты ответов: 1) $y' + p(x)y^2 = q(x)$; 2) $y^2 + p(x)\ y = q(x)$; 3) $y = ax + b$; 4) $y' + p(x)\ y = q(x)$; 5) $P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = 0$.

2. Даны уравнения: а) $y' + y = x$; б) $y'x + xy = 1$; в) $y' + \dfrac{x}{y} = y$; г) $y' + \dfrac{y}{x} = e^x$; д) $y\cos x + x\sin y = 1$. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка являются:

Варианты ответов: 1) а), б), г); 2) в), г); 3) а), в), г); 4) б), д); 5) б), в), г).

3. Общее решение уравнения $y' - y = e^x$ имеет вид:

Варианты ответов: 1) $y = e^x + C$; 2) $y = e^x(x + C)$; 3) $y = e^{x+C}$; 4) $y = x(e^x + C)$; 5) $y = (x + C)(e^x + C)$.

4. Общее решение уравнения $y' - \dfrac{y}{x} = x\cos x$ имеет вид:

Варианты ответов: 1) $y = \sin x + C$; 2) $y = x(\sin x + C)$; 3) $y = x(\cos x + C)$; 4) $y = (x + C)\sin x$; 5) $y = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + C\right)\sin x$.

5. Общее решение уравнения $y' - \dfrac{y}{x} = 3x^3$ имеет вид:

Варианты ответов: 1) $y = 3x^3 + C$; 2) $y = 3x^3(\ln x + C)$; 3) $y = \dfrac{3}{4}x^5 + Cx$; 4) $y = x^4 + Cx$; 5) $y = \left(\dfrac{1}{2}x^2 + C\right)\ \ln x$.

6. Решением уравнения $xy' = 1$ является:

Варианты ответов: 1) $y = x$; 2) $y = 1$; 3) $y = -\dfrac{1}{x^2}$; 4) $y = e^x$; 5) $y = \ln x$.

7. Решением уравнения $y' \operatorname{tg} x = y + 2$ является:

Варианты ответов: 1) $y = \sin x - 2$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = \operatorname{tg} x + 2$; 4) $y = \cos x + C$; 5) $y = \operatorname{ctg} x$.

8. Общее решение уравнения $y' = 2\sqrt{y}$ имеет вид $y = (x + C)^2$. Частным решением данного уравнения, удовлетворяющим условию $y = 4$ при $x = 1$, является:

Варианты ответов: 1) $y = (x + 1)^2$; 2) $y = (x - 1)^2$; 3) $y = (x + 2)^2$; 4) $y = x^2$; 5) $y = (x - 4)^2$.

9. Общее решение уравнения $y' + y = 0$ имеет вид:

Варианты ответов: 1) $y = e^x + C$; 2) $y = \cos x + C$; 3) $y = e^{-x} + C$; 4) $y = -\dfrac{1}{2}y^2 + C$; 5) $y = Ce^{-x}$.

10. Частным решением уравнения $y' - \cos x = 1$, удовлетворяющим условию $y = 0$ при $x = \pi$, является:

Варианты ответов: 1) $y = x + \sin x - \pi$; 2) $y = \cos x + 1$; 3) $y = \sin x$; 4) $y = \pi$; 5) $y = x - \sin x + \pi$.

Литература

1. Майоровская С.В., Поддубная О.Н., Станишевская Л.В. *Элементы высшей математики.* Мн.: «Вышэйшая школа», 2010.

2. Шамукова Н.В., Станишевская Л.В., Евдокименко Э.Д., Якимченко С.Л. *Высшая математика.* Ч. 2. Мн.: БГЭУ, 2011.

3. Гайшун Л.Н., Денисенко Н.В., Марков А.В., Станишевская Л.В., Ящина Н.Н. *Сборник задач и упражнений по высшей математике.* Ч. 2. Мн.: БГЭУ, 2009.

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС PhaPl ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ НА ПЛОСКОСТИ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ГЕНЕРАЦИИ ЗАДАЧ

А.А. Черепанов

Построение и исследование фазового портрета системы

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

где P и Q — непрерывные функции, является важной учебной задачей при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение данной задачи является трудоемким процессом, поэтому проверка решения и разбор задачи в случае ошибки учащегося требуют много времени от преподавателя. Для сокращения затрат времени и для повышения вовлеченности студентов был разработан наглядный, интерактивный программный комплекс PhaPl. Он внедрен в учебный процесс Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова и на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Результаты подробно описаны в [1]. PhaPl позволяет вводить произвольные задачи и может использоваться в исследованиях.

Для удобства использования программный комплекс распространяется вместе с задачами из учебного пособия [2]. PhaPl является свободным программным обеспечением, однако авторские права на набор задач сокращают возможности распространения программного комплекса. Желание сделать PhaPl максимально доступным и содержащим высококачественный набор задач привело к вопросу автоматической генерации задач с заданными свойствами.

Есть различные подходы к генерации задач [3]. Для генерации задач на построение и исследование фазовых портретов может быть использован шаблон, демонстрирующий все типы простых особых точек [4]. Чтобы задачи не выглядели шаблонно, может быть использован метод генерации случайных математических выражений. Расширенный метод [5] включает в себя решение задачи для определения ее корректности. Таким образом объединение PhaPl и генератора задач в единую учебную среду является логичным развитием программного комплекса.

Если учащийся не справился с задачей, то PhaPl используется для разбора правильного решения, однако после этого нет смысла повторять построение фазового портрета для этой задачи. Так же студенты отмечают, что им не интересно делать ту же задачу заново. Поэтому, если не получился свой вариант задачи, учащемуся предлагается выполнить другой вариант. Генерация задач в этот момент может позволить создать новую задачу с теми же типами особых точек, что были в задаче, которая не получилась. Это должно повысить качество усвоения материала. Совмещение PhaPl с генератором задач должно упростить это.

Главным неудобством PhaPl является большой размер, который сильно увеличивает время скачивания и установки. Большой размер обусловлен использованием LaTeX, Maxima и Qt. Их можно заменить на MathJax, SymPy и HTML5 в веб-браузере, уже установленном на компьютере. Эксперименты показали возможность использования SymPy в браузере при помощи PyPy.js. Это позволяет производить автоматическое решение задачи полностью в веб-браузере, без участия сервера в вычислениях. Так что PhaPl сможет распространяться в виде сайта, который не потребует много ресурсов от сервера и сможет работать без подключения к интернету после сохранения локальной копии.

Таким образом текущий уровень технологий позволяет программному комплексу PhaPl стать доступной учебной средой с возможностями как разбора введенных задач, так и генерации новых учебных задач.

Программный комплекс PhaPl доступен для скачивания по следующей ссылке: https://github.com/AlekseyCherepanov/phapl

Литература

1. Черепанов А.А. *Программный комплекс PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости* // Открытое образование. 2017. № 3. С. 66–72.

2. Асташова И.В., Никишкин В.А. *Практикум по курсу «Дифференциальные уравнения»*. Учеб. пособие. Изд. 3-е, испр. М.: Изд. центр ЕАОИ, 2010. http://new.math.msu.su/diffur/main_du_2010.pdf

3. Посов И.А. *Обзор генераторов и методов генерации учебных заданий* // ОТО. 2014. № 4. http://cyberleninka.ru/article/n/obzor-generatorov-i-metodov-generatsii-uchebnyh-zadaniy

4. Черепанов А.А. *О типах особых точек динамической системы определенного вида* // Материалы конференций, проходивших в рамках «Дней студенческой науки МЭСИ. Осень–2014». Сб. науч. тр. Ч. 2 / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. М., 2014. С. 259–265.

5. Черепанов А.А., Сутырина И.А. *Программное обеспечение для генерации тестовых заданий для оценки знаний студентов по высшей математике* // «Ломоносов–2018». XXV Междунар. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. Секция «Вычислительная математика и кибернетика». М., 2018.

МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

А.П. Шилин

Умение студента решить методом вариации произвольных постоянных (ВПП) уравнение $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, сводится, главным образом, к умению вычислить возникающие по ходу решения два интеграла; остальные действия, приводящие к ответу, осуществляются просто и быстро. Если соответствующее характеристическое уравнение имеет действительные корни k_1 и k_2, то интегралы имеют вид $\int e^{-k_1x} f(x)\,dx$, $\int e^{-k_2x} f(x)\,dx$, а если комплексно-сопряженные корни $\alpha \pm i\beta$, то вид $\int e^{-\alpha x} \cos\beta x f(x)\,dx$, $\int e^{-\alpha x} \sin\beta x f(x)\,dx$. При произвольных k_1, k_2, α, β подобрать функцию $f(x)$ так, чтобы оба интеграла были несложными в вычислении, довольно затруднительно. Функция $f(x)$ не должна быть при этом такой, как в методе неопределенных коэффициентов, а интегралы должны быть «берущимися», причем «берущимися» сравнительно несложно известными студенту методами математического анализа, — именно такие случаи следует расценивать как хорошие учебные примеры на метод ВПП.

Возьмем, например, уравнение $y'' - 5y' - 24y = f(x)$ с целыми значениями $k_1 = -3$, $k_2 = 8$. Автор сообщения затрудняется указать хотя бы одну функцию $f(x)$, чтобы получился хороший учебный пример на метод ВПП, и такая ситуация является типичной. Не получится также «создать» $f(x)$, взяв какую-либо несложную функцию y_* и подставив ее в левую часть уравнения. К общему решению вида $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{8x} + y_*$ студент не придет, так как столкнется при решении с «неберущимися» интегралами. Не случайно в известных сборниках задач по дифференциальным уравнениям (см., например, [1, 2] и др.) крайне невелик выбор учебных примеров на метод ВПП. Ситуация немного странная, поскольку в теоретическом отношении методы ВПП можно считать основным методом решения линейных неоднородных уравнений, а сами линейные уравнения занимают центральное место в курсе дифференциальных уравнений. Причина этой ситуации в небольшом запасе интегралов с показательной функцией, поддающихся нетрудному вычислению в курсе математического анализа.

В работе [3] нами составлено для студентов физических специальностей БГУ достаточное количество примеров на метод ВПП. Пришлось довольно кропотливо согласовывать значения k_1, k_2, α, β и $f(x)$. Примеры сгруппированы в варианты, каждому студенту в академической группе можно давать индивидуальный вариант. Приведем один из вариантов:

$$1)\ \ y'' - 11y + 30y = \frac{e^{7x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}};\quad 2)\ \ y'' - 6y' + 8y = \frac{6e^{5x}}{e^{2x} + 9};$$
$$3)\ \ y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}\operatorname{ch} x;\qquad 4)\ \ y'' - 8y' + 17y = \frac{e^{4x + \operatorname{ctg} x}}{\sin^3 x}.$$

Нам представляется, что такие примеры помогут студентам хорошо освоить метод ВПП на практических занятиях и что они окажутся полезными в учебном процессе для студентов различных специальностей.

Литература

1. Филиппов А.Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Ленанд/URSS, 2015.

2. Матвеев Н.М. *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* СПб.: Лань, 2002.

3. Шилин А.П., Глецевич М.А. *Задания к контрольным мероприятиям по курсу дифференциальных уравнений для студентов физических специальностей.* БГУ, Физический факультет. — Минск, 2015. — 39 с. — № 003623062015. Деп. в БГУ 23.06.2015.

К ВОПРОСУ О МОТИВАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ РАЗДЕЛА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Е.И. Шилкина, М.П. Дымков

Важность изучения раздела «Дифференциальные уравнения» будущими экономистами и сложность восприятия этой темы студентами-первокурсниками неоднократно обсуждалась и не вызывает сомнений. Из многолетнего опыта преподавания в БГЭУ и других вузах авторы убедились в том, что и методика, и технология обучения должны постоянно совершенствоваться, адаптируясь к постоянному уменьшению аудиторных часов, и как следствие, увеличению объема самостоятельной работы. Также необходимо учитывать возростающую неоднородность контингента обучаемых в уровне школьной математической подготовки, языковые и другие социокультурные барьеры, особенно при работе с иностранными студентами.

Современному преподавателю из множества концепций, предлагаемых в научной и педагогической литературе, необходимо выбрать наиболее доступное и математически строгое изложение учебного материала для всех категорий студентов. На первой же лекции по дифференциальным уравнениям студентам показывается важность изучения именно этого раздела на примерах прикладных задач, подобранных конкретно для экономической специализации обучающихся. Например, уместным выглядит доказательство утверждения

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = p^*,$$

где $p(t)$ — цена товара, p^* – равновесная цена из широко известной модели Эванса, что согласуется с экономическими понятиями, знакомыми студентам из курса микроэкономики. Отметим, что достаточно много экономических моделей и задач с экономическим содержанием приведено в [1, 2], которые можно рекомендовать для углубленного изучения успешным студентам.

Перед семинарскими занятиями студентам предлагается алгоритм решения каждого типа дифференциальных уравнений, прописанный пошагово как в общем виде, так и для конкретного примера. Этот материал разрешается использовать студентам на первых занятиях в качестве справочного материала вместе с таблицей интегралов и производных. Такой справочный материал помогает наиболее слабым студентам сразу включиться в работу, решая по шаблону предложенные задачи.

Для более подготовленных студетов предлагается свой темп обучения, для чего им раздается материал с заданиями разного уровня сложности. При этом один или несколько студентов работают у доски. Тиражирование и распространение лекционного, справочного и раздаточного материала легко осуществляется посредством электронной рассылки и других возможностей, предоставляемых Internet-технологиями.

Следует отметить, что в последнее время особую озабоченность вызывает использование студентами при выполнениии ими контрольных и экзаменационных мероприятий новейших разработак беспроводной связи и передачи графической информации. Представляется, что силами одного лишь преподавателя данная проблема не может быть успешно решена. Одним из возможных вариантов работы с иностранными студентами является формирование учебных групп для проведения семинарских занятий, состоящих только из иностранных студентов, а также проведение по их просьбе дополнительных занятий и консультаций на платной основе по согласовнию с администрацией вуза.

Таким образом, обеспечение учебного процесса методическими разработками прикладной направленности, учет интеллектуальных и психологических особенностей личности обучаемого, внедрение компьютерных технологий, активная совместная творческая работа усиливают мотивацию студентов к изучению курса высшей математики вообще, и дифференциальных уравнений, в частности.

Литература

1. Астровский А.И.,Дымков М.П. *Высшая математика. Учебное пособие. Ч. 2.* Мн.: БГЭУ, 2011.
2. Амелькин В.В. *Дифференциальные уравнения в приложениях.* М.: Наука, 1987.

РОЛЬ СРЕДЫ В ФОРМИРОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОФЕССИОНАЛЬНО ЗНАЧИМЫХ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ КУРСАНТОВ ВОЕННОЙ АКАДЕМИИ

Г.А. Шунина

Методика формирования математических профессионально значимых знаний и умений курсантов военно-командных специальностей при их обучении математике была разработана и внедрена сначала на общевойсковом факультете [1], а затем и на нескольких других факультетах Военной академии (см. [2] и др.). Методика реализуется через наполнение всех компонентов методической системы обучения курсантов, включающей цель, содержание, методы, формы и средства обучения, междисциплинарными связями дисциплины «Основы высшей математики» с военными специальными дисциплинами.

С этой же целью сначала был разработан, а сейчас совершенствуется методический и организационный профессионально направленный комплекс для совершенствования математической образовательной среды обучения курсантов военно-командных специальностей Военной академии. Он содержит новую учебную программу, курс лекций и практических занятий, систему математических военно-прикладных задач, инновационный программно-математический лабораторный практикум.

Теория средового подхода в образовании была разработана руководителем лаборатории среды и средовых исследований в образовании Нижегородского института развития образования доктором педагогических наук Ю.С. Мануйловым, учеником академика РАО Л.И. Новиковой. Средовой подход представляет собой теорию осуществляемого через специально формируемую среду управления процессом формирования и развития курсанта. Теорию средового подхода можно определить как методологию: методологию педагогической деятельности и методологию научно-педагогического исследования. Средовой подход обладает такими базовыми процедурами, как средообразование, наполнение ниш, инверсия среды, осреднение и типизация. Система действий со средой превращает ее в средство комплексного целенаправленного воздействия на личность курсанта. Среда раскрывает те или иные возможности для развития личности курсанта. Среда влияет на его образ жизни, задавая те или иные стереотипы, модели, «коридоры» движения по жизни. В итоге среда типизирует личность и тем самым позволяет обществу через воспитание реализовывать в широкой практике те или иные идеалы, получать тот или иной тип личности.

Средовой подход освещен в исследованиях Ю.К. Бабанского, К.В. Гавриловец, Ю.С. Мануйлова, А.П. Сманцера и др. «В современной педагогике уделяется особое внимание средовым факторам в обучении, способствующим развитию и саморазвитию будущих специалистов. Средовой подход является методологической основой проектирования образовательной среды высшего учебного заведения» [3, с. 193]. В связи с этим возникает необходимость пересмотра структуры образовательного процесса, обеспечение его соответствия национальным целям совершенствования технологий подготовки офицеров. Спроектированная и поддерживаемая в Военной академии естественная учебно-армейская среда способствует формированию профессиональных знаний, умений и навыков курсантов, в частности, при изучении высшей математики.

Литература

1. Шунина Г.А. *Формирование математических профессионально значимых знаний и умений курсантов военно-командных специальностей Военной академии.* Дис. ... канд. пед. наук. 13.00.02 / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка. Минск, 2014.

2. Шунина Г.А. *Обучение курсантов факультета внутренних войск Военной академии математической поддержке в ходе принятия служебно-командных решений* // Весн. Віцебскага дзярж. ўн-та. 2015. № 4 (88). С. 84–91.

3. Сманцер А.П. *Образовательная среда высшего учебного заведения как педагогический феномен* // Роль и место образовательной среды в непрерывном развитии и саморазвитии личности обучающихся: материалы VIII междунар. науч.-практ. конф. Гродно, 17–18 марта 2011 г.: в 4 ч. Гродно: ТехноОбраз, 2011. Ч. 1. С. 193–197.

АВТОРЫ ДОКЛАДОВ

Абрашина–Жадаева Н.Г. zhadaeva@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 3.

Аджиев С.З. vicveden@yahoo.com. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия. С. 86.

Ажымбаев Д.Б. darkhan70@gmail.com. Актюбинский региональный государственный университет, Актобе, Казахстан. С. 108.

Акимов В.А. vakim50@mail.ru. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 47.

Алероев Т.С. aleroev@mail.ru. НИУ Московский государственный строительный университет, Москва, Россия. С. 48.

Алтынбеков Ш. shahmaksut@mail.ru. Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан. С. 81.

Альсевич Л.А. alsevichla@bsu.by, laalsevich@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 122, 123.

Андрушкевич И.Е. racursj@yandex.ru. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 4.

Антоневич А.Б. antonevich@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 49.

Банару Г.А. mihail.banaru@yahoo.com. Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия. С. 82.

Безяев В.И. vbezyaev@mail.ru. Российский университет дружбы народов, Москва, Россия. С. 84.

Белько И.В. niipulm@tut.by. Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь. С. 124.

Битюрин А.А. sntk_2013@mail.ru. Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, Россия. С. 5.

Бородич С.М. sirius722@rambler.ru. Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 6.

Булатов В.И. bulatov@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 122, 125.

Василевич М.Н. vasilevich.m@gmail.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 126.

Васильев В.Б. vbv57@inbox.ru. Национальный исследовательский Белгородский государственный университет, Институт инженерных технологий и естественных наук, Белгород, Россия. С. 51.

Васьковский М.М. vaskovskii@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 85.

Веденяпин В.В. vicveden@yahoo.com. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия. С. 86.

Винь Н.В. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 17.

Галицкая А.О. G_Alexandra_06@mail.ru. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 7.

Гарипов И.Б. ilnur_garipov@mail.ru. Казанский федеральный университет, Казань, Россия. С. 8.

Гладков А.Л. gladkoval@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 9, 10.

Глецевич М.А. gletsev@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 127.

Голуб А.А. agolub@tut.by. Мозырский государственный педагогический университет им И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь. С. 101.

Голуб П.А. golubpav@gmail.com. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 53.

Голубева И.А. igolubeva155@gmail.com. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 129.

Горбунов В.К. vkgorbunov@mail.ru. Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия. С. 87.

Горин В.В. vvgorin@mail.ru. Киев, Украина. С. 54.

Дайняк В.В. dainyak@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 11.

Дейцева А.Г. a.deytseva@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 89.

Денисенко Н.В. svmayor@mail.ru. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь. С. 124, 130.

Дубровская В.А. torry_2902@mail.ru. Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия. С. 90.

Дымков М.П. dymkov_m@bseu.by. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь. С. 151.

Жук А.И. zhukai85@mail.ru. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь. С. 56.

Жуковская Т.В. t_zhukovskaia@mail.ru. Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Российская Федерация. С. 62.

Жур Т. А. tatyana-zhur@mail.ru. Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь. С. 106.

Жураев Б.Б. bakhodir.zhuraev.52@mail.ru. Термезский филиал Ташкентского государственного технического университета, Термез, Узбекистан. С. 57.

Зайко Ю.С. juliazaiko@yandex.ru. Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 116.

Знаенко Н.С. znaenas@mail.ru. Ульяновский институт гражданской авиации им. главного маршала авиации Б.П. Бугаева, Ульяновск, Россия. С. 137.

Зубко О.Л. ozubko@bntu.by. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 92.

Игнатенко В.В. ihnatsenko@tut.by. Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь. С. 93.

Игнатенко М.В. ignatenkomv@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 58.

Исаченко А.Н. isachenkoan@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 131.

Кавитова Т.В. kavitovatv@tut.by. Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 10.

Казанцева В.В. vicveden@yahoo.com. Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия. С. 86.

Каландия Е.И. Xudickay_EI@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 132.

Капусто А.В. kapusto@tut.by. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 134.

Карачик В.В. karachik@susu.ru. Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия. С. 12.

Кастрица О.А. kastritsa@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 125.

Качан И.В. ilyakachan@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 85.

Каянович С.С. kayanovichs@gmail.com. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 13.

Кветко О.М tx1@tut.by. Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь. С. 135.

Кечко Е.П. ekechko@gmail.com. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 68.

Ковалева И.С. isida89@list.ru. Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь. С. 60.

Наумовец С.Н. Брестский государственный университет, Брест, Беларусь. С. 18.

Неманова И. Т. tatyana-zhur@mail.ru. Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь. С. 106.

Нигмедзянова А.М. aigmani23@rambler.ru. Казанский федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского, Казань, Россия. С. 29.

Никитин А.И. ip.alexnikitin@gmail.com. Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 30.

Новик Ю.Ф. novik.yu.f@gmail.com. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 4.

Овсиюк Е.М. e.ovsiyuk@mail.ru. Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь. С. 101, 104.

Окрут Я.А. smail.smail29@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 31.

Панжиева Н.Н. bakhodir.zhuraev.52@mail.ru. Термезский филиал Ташкентского государственного технического университета, Термез, Узбекистан. С. 57.

Панов Е.Ю. Eugeny.Panov@novsu.ru. Новгородский государственный университет, Великий Новгород, Россия. С. 33.

Пантелеева Е.В. nis@brsu.brest.by. Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест, Беларусь. С. 74.

Переварюха А.Ю. temp_elf@mail.ru. Санкт-Петербургский Институт информатики и автоматизации РАН, Санкт-Петербург, Россия. С. 90.

Проневич А.Ф. pranevich@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 111.

Пронько В.А. v.pronko@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 132.

Пучков Н.П. puchkov@nnn.tstu.ru, lobantchik@yandex.ru. Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Россия. С. 62, 143.

Радыно А.Я. ales.radyna@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 63.

Радыно Н.Я. mir@bsu.by, mir-0602@yandex.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 103, 122.

Раевская Л.А. larais@mail.ru. Белорусский национальный технический университет, кафедра высшей математики № 1, Минск, Беларусь. С. 131.

Размыслович Г.П. razmysl@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 139, 145.

Расолько Г.А. rasolka@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 123.

Редьков В.М. v.redkov@ifanbel.bas-net.by. Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 104.

РоманенкоА.А. romanenko1956@gmail.com. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 98.

Рябушко А.П. mathematics1@bntu.by, tatyana-zhur@mail.ru. Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь. С. 92, 106.

Садеков Н.Х. nail.sadd@mail.ru. Российский университет дружбы народов, Москва, Россия. С. 84.

Сартабанов Ж.А. sartabanov42@mail.ru. Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Республика Казахстан. С. 23.

Севастюк В.А Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 18.

Семенчук Н.В. senata155@gmail.com. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 89.

Сериков В.П. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 18.

Скоморохов В.В. uaa@nnn.tstu.ru. Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Россия. С. 64.

Спасков С.А. sergey.spaskov@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 66.

Шунина Г.А. chuninagalina@mail.ru. Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь. С. 152.

Шушкевич Г.Ч. gsys@grsu.by, sidorov@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 113, 114.

Шушкевич С.В. sidorov@grsu.by. Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь. С. 114.

Эглит М.Э. m.eglit@mail.ru. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 116.

Юрчук Н.И. yurchuk@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 36.

Якубенко А.Е. yakub@imec.msu.ru. Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 116.

Якубенко Т.А. yakubta@mail.ru. Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 116.

Янович Л.А. yanovich@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 58.

Яшкин В.И. yashkin@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 126.

Assanova A.T. assanova@math.kz; anarasanova@list.ru. Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan. С. 43.

Czornik A. adam.czornik@polsl.pl. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 79.

Dubatovskaya M.V. dubatovska@bsu.by. Belarusian State University, Minsk, Belarus. С. 76.

Janavičius A.J. AYanavy@gmail.com. Research Institute, Šiauliai University, Lithuania. С. 117.

Jurgaitis D. d.jurgaitis@cr.su.lt. Šiauliai University, Lithuania. С. 117.

Karpovich S.E. mmts@bsuir.by. Belorussian State University of Informatics and Radioelectronics Minsk, Belarus. С. 118.

Kimmel M. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 120.

Kmit I. kmit@informatik.hu-berlin.de. Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, Ukraine; Institute of Mathematics of the Humboldt University of Berlin, Germany. С. 44.

Krzeslak M. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 120.

Kuzniatsou V.U. v.kuzniatsou@gmail.com. Belorussian State University of Informatics and Radioelectronics Minsk, Belarus. С. 118.

Nieto J.J. juanjose.nieto.roig@usc.es. Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, Spain. С. 79.

Niezabitowski M. michal.niezabitowski@polsl.pl. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 79.

Omarova B.Zh. bibigul_zharbolkyzy@mail.ru. K. Zhubanov Aktobe regional state university, Aktobe, Kazakhstan. С. 45.

Partsvania N. nino.partsvania@tsu.ge. A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia. С. 75.

Recke L. recke@math.hu-berlin.de. Institute of Mathematics of the Humboldt University of Berlin, Germany. С. 44.

Rogosin S.V. rogosinsv@gmail.com. Belarusian State University, Minsk, Belarus. С. 76.

Sartabanov Zh.A. sartabanov42@mail.ru. K. Zhubanov Aktobe regional state university, Aktobe, Kazakhstan. С. 45.

Shlapakov S.A. skoromnik@gmail.com. Vitebsk State P.M. Masherov University, Vitebsk, Belarus. С. 78.

Skoromnik O.V. skoromnik@gmail.com. Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus. С. 78.

Swierniak A. andrzej.swierniak@polsl.pl. Silesian University of Technology, Gliwice, Poland. С. 120.

Tuan H.T. httuan@math.ac.vn. Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology, Ha Noi, Viet Nam. С. 79.

Turskienė S. turskienes@gmail.com. Šiauliai University, Lithuania. С. 117.

СОДЕРЖАНИЕ

Уравнения в частных производных

Интегро-дифференциальные операторы и уравнения

Дифференциальные уравнения и их приложения

Методика преподавания дифференциальных уравнений в высшей школе

Научное издание

XVIII Международная научная конференция
по дифференциальным уравнениям

(ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2018)

Материалы конференции

Часть 2

Редакторы *А. К. Деменчук, С. Г. Красовский, Е. К. Макаров*
Компьютерная верстка *С. Г. Красовский, Г. И. Кузнецова*

Подписано в печать 27.04.2018 г.
Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{8}$. Усл. печ. л. 19,07. Уч.-изд. л. 17,16. Тираж 100 экз. Зак. 4.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
200072, Минск, ул. Сурганова, 11.